

Gemischte lineare Modelle

Aufgabenblatt 4

22. Juni 2009

10. Wir betrachten in dieser Aufgabe das Modell aus Aufgabe 1b) mit $\mathbf{X}_i = (1, 1)'$, $i = 1, 2$. Dies ist ein spezielles balanciertes Modell mit zufälligen Koeffizienten, vgl. Aufgabe 8 (gleichzeitig ein spezielles balanciertes Modell mit zufälligem Achsenabschnitt, vgl. Aufgabe 9). Wir wollen den Parametervektor $\vec{\theta} = (\beta, \sigma^2, \kappa)$ mit $\kappa = \tau^2/\sigma^2$ schätzen. Als Daten liegen uns die Werte $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$ vor.

a)* Ist dieses Modell identifizierbar?

b) Bestimmen Sie den gewöhnlichen KQ-Schätzer $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0)'$ gemäß 1.3 und den fixed effects Schätzer $(\hat{\beta}_{\infty}, s_{min}^2, \infty)'$ gemäß 2.6c) für $\vec{\theta}$.

c)* Man kann zeigen (siehe Demidenko, 2004, S. 63-65), dass im balancierten Modell mit zufälligen Koeffizienten gilt

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \hat{\sigma}_{ReML}^2 = \frac{1}{m(n-p)} \sum_{i=1}^m \vec{y}_i' (\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1') \vec{y}_i .$$

Stellen Sie auf Basis dieser Formeln sowohl die gewöhnliche Profile-Log-Likelihood als auch die restringierte Profile-Log-Likelihood auf.

Bestimmen Sie sodann die Maximum-Likelihood und auch die restringierte Maximum-Likelihood Schätzung von $\vec{\theta}$ für die gegebenen Daten.

d)* Führen Sie (zum Üben) einen Schritt des Newton-Raphson Verfahrens zur Maximierung der Profile-Log-Likelihood beginnend mit dem Startwert $\kappa^{(0)} = 1$ durch.

e) Stellen Sie nun die volle Log-Likelihood-Funktion auf und bestimmen Sie den zugehörigen Gradientenvektor und die Hesse-Matrix. Führen Sie einen Schritt des Fisher-Scoring Algorithmus für die gegebenen Daten aus, beginnend mit der Startlösung $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0.01)$.

f)* Stellen Sie nun einen EM-Algorithmus für dieses Modell auf und implementieren Sie ihn. Führen Sie sodann einen Schritt des EM-Algorithmus beginnend mit $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0.01)$ durch.

Die mit * gekennzeichneten Aufgabenteile können bis zum 02.07.2009, 15:00, in den Briefkasten Nr. 142 eingeworfen werden. Die Rückgabe erfolgt in der nächsten Übung am 06.07.2009.