

# Gemischte lineare Modelle

## Aufgabenblatt 4

22. Juni 2009

10. Wir betrachten in dieser Aufgabe das Modell aus Aufgabe 1b) mit  $\mathbf{X}_i = (1, 1)'$ ,  $i = 1, 2$ . Dies ist ein spezielles balanciertes Modell mit zufälligen Koeffizienten, vgl. Aufgabe 8 (gleichzeitig ein spezielles balanciertes Modell mit zufälligem Achsenabschnitt, vgl. Aufgabe 9). Wir wollen den Parametervektor  $\vec{\theta} = (\beta, \sigma^2, \kappa)$  mit  $\kappa = \tau^2/\sigma^2$  schätzen. Als Daten liegen uns die Werte  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 5$ ,  $y_4 = 7$  vor.

a)\* Ist dieses Modell identifizierbar?

b) Bestimmen Sie den gewöhnlichen KQ-Schätzer  $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0)'$  gemäß 1.3 und den fixed effects Schätzer  $(\hat{\beta}_{\infty}, s_{min}^2, \infty)'$  gemäß 2.6c) für  $\vec{\theta}$ .

c)\* Man kann zeigen (siehe Demidenko, 2004, S. 63-65), dass im balancierten Modell mit zufälligen Koeffizienten gilt

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \hat{\sigma}_{ReML}^2 = \frac{1}{m(n-p)} \sum_{i=1}^m \vec{y}_i' (\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1') \vec{y}_i .$$

Stellen Sie auf Basis dieser Formeln sowohl die gewöhnliche Profile-Log-Likelihood als auch die restringierte Profile-Log-Likelihood auf.

Bestimmen Sie sodann die Maximum-Likelihood und auch die restringierte Maximum-Likelihood Schätzung von  $\vec{\theta}$  für die gegebenen Daten.

d)\* Führen Sie (zum Üben) einen Schritt des Newton-Raphson Verfahrens zur Maximierung der Profile-Log-Likelihood beginnend mit dem Startwert  $\kappa^{(0)} = 1$  durch.

e) Stellen Sie nun die volle Log-Likelihood-Funktion auf und bestimmen Sie den zugehörigen Gradientenvektor und die Hesse-Matrix. Führen Sie einen Schritt des Fisher-Scoring Algorithmus für die gegebenen Daten aus, beginnend mit der Startlösung  $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0.01)$ .

f)\* Stellen Sie nun einen EM-Algorithmus für dieses Modell auf und implementieren Sie ihn. Führen Sie sodann einen Schritt des EM-Algorithmus beginnend mit  $(\hat{\beta}_{KQ}, \hat{\sigma}_{KQ}^2, 0.01)$  durch.

Die mit \* gekennzeichneten Aufgabenteile können bis zum 02.07.2009, 15:00, in den Briefkasten Nr. 142 eingeworfen werden. Die Rückgabe erfolgt in der nächsten Übung am 06.07.2009.