Gemischte lineare Modelle

Aufgabenblatt 2

18. Mai 2009

4. Für die Berechnung der ML- und der ReML-Schätzung im LMM benötigen wir die Determinante und die Inverse von $\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_i' + \boldsymbol{\Sigma}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Unter der üblichen Annahme $\boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbar lassen sich hierfür vereinfachende Formeln finden:

$$\begin{aligned} \ln(\det(\boldsymbol{V}_i)) &= \ln\left(\det(\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i)\right) - \ln\left(\det(\boldsymbol{B}^{-1})\right), \\ \boldsymbol{V}_i^{-1} &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i(\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i)^{-1}\boldsymbol{Z}_i' . \end{aligned}$$

   a) Um diese Formeln herzuleiten, zeigen Sie:
   Sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ $(k \times l)$- bzw. $(l \times k)$-Matrizen, so gilt

   $$\det(\boldsymbol{I}_k + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = \det(\boldsymbol{I}_l + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}) .$$

   TIPP: Wenden Sie die Partitionsformel

   $$\det(\boldsymbol{T})\det(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{U}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{W})\det(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{V})$$

   für quadratische Matrizen $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{W}$ sowie $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ "passend" an auf $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$.

   b) Beweisen Sie nun die obigen Formeln für $\ln(\det(\boldsymbol{V}_i))$ und $\boldsymbol{V}_i^{-1}$.

*5. a) Zeigen Sie: Im allgemeinen normalen linearen Regressionsmodell ist der optimale gewichtete KQ-Schätzer $\hat{\vec{\beta}} = \boldsymbol{A}\vec{Y}$ mit $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}$ stochastisch unabhängig von jeder Statistik $\boldsymbol{M}\vec{Y}$, deren Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{M}$ die Orthogonalitätsbedingung $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ erfüllt. (Die Zeilen von $\boldsymbol{M}$ heißen dann Kontraste.)

   b) Folgern Sie, dass $\boldsymbol{C}\vec{Y}$ stochastisch unabhängig von $\hat{\vec{\beta}}$ aus a) ist, wenn $\boldsymbol{C}$ die Gleichungen $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{I}_{N-p}$ und $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}$ mit $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$) erfüllt.

   c) Begründen Sie: Hat $\boldsymbol{X}$ vollen Spaltenrang p, so bilden die Kontraste einen $(N-p)$-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^N$ (als Zeilenraum), den die Zeilen von $\boldsymbol{C}$ aufspannen.

   d) Zeigen Sie, dass $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = [\det(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})]^{-1/2}$.

   TIPP: Wenden Sie wieder die Partitionsformel aus Aufgabe 4a) an auf die Matrix $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{A}' \end{pmatrix}$.

   e) Stellen Sie eine Formel für die Dichte von $\boldsymbol{C}\vec{Y}$ auf ($\rightarrow$ restringierte Likelihood).

6. Wir wollen die gewichtete Kleinstequadratesumme

$$\sum_{i=1}^{m} (\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\vec{\beta})'(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_i')^{-1}(\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\vec{\beta}),$$

welche dem ML-Schätzer $\hat{\sigma}^2_{ML}$ im LMM aus 2.2 zugrunde liegt, nach unten und oben abschätzen, und damit letztlich Schranken für $\hat{\sigma}^2_{ML}$ finden. Es gelte wieder $\boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{I}_{n_i}$.

a) Zeigen Sie, dass im LMM im Sinne der Loewnerschen Halbordnung gilt, dass

$$\boldsymbol{I} \geq (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_i')^{-1} \geq \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^+,$$

wobei $\boldsymbol{Z}_i^+ = (\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'$ sei.
TIPP: Nutzen Sie $\boldsymbol{M}_1 \leq \boldsymbol{M}_2 (> \boldsymbol{0}) \iff \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2^{-1} \leq \boldsymbol{I}$ und multiplizieren Sie $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^+)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_i')$ aus.
Außerdem gilt: $\boldsymbol{M}_1 \geq \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3 \geq \boldsymbol{M}_4 \Rightarrow \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_3 \geq \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_4$ und $\boldsymbol{M}_1^{-1} \leq \boldsymbol{M}_2^{-1}$ (falls $\boldsymbol{M}_2^{-1}$ existiert).

b) Folgern Sie, dass im LMM gilt, dass

$$s^2_{min} \leq \hat{\sigma}^2_{ML} \leq \hat{\sigma}^2_{KQ},$$

wobei

$$\begin{aligned}
s^2_{min} &= N^{-1} \sum_{i=1}^{m} (\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\hat{\vec{\beta}}_\infty)'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^+)(\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\hat{\vec{\beta}}_\infty) \\
\hat{\vec{\beta}}_\infty &= \left[\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^+)\boldsymbol{X}_i\right] \left[\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{X}_i'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i^+)\vec{y}_i\right] \quad \text{(”fixed effects estimator”)} \\
\hat{\sigma}^2_{KQ} &= N^{-1} \sum_{i=1}^{m} (\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\hat{\vec{\beta}}_{KQ})'(\vec{y}_i - \boldsymbol{X}_i\hat{\vec{\beta}}_{KQ}) \ .
\end{aligned}$$

TIPP: Verwenden Sie, dass $\hat{\vec{\beta}}_\infty$, $\hat{\vec{\beta}}_{ML}$ und $\hat{\vec{\beta}}_{KQ}$ die s^2_{min}, $\hat{\sigma}^2_{ML}$ bzw. $\hat{\sigma}^2_{KQ}$ zugrundeliegende quadratische Form minimieren.

*7. Wir betrachten nochmals das Modell aus Aufgabe 1a).

a) Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer von $\vec{\theta} = (\mu, \sigma^2, \tau^2)'$ existiert, falls es $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $y_{j_1} \neq y_{j_2}$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass hier $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{I} - \frac{\kappa}{1 + n\kappa}\vec{1}\vec{1}'$ gilt, wobei $\vec{1} = (1, \ldots, 1)'$ und $\kappa = \tau^2/\sigma^2$.

c) Bestimmen Sie den ML-Schätzer von $\vec{\theta}$.
TIPP: Man kann hier $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}^2$ unter Verwendung der Formeln aus 2.2 bestimmen. Die Profile-log-Likelihood als Funktion von κ hat sodann bis auf Konstanten eine einfache Form.

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben können bis zum 03.06.2009, 12:00, in den Briefkasten Nr. 142 eingeworfen werden. Die Rückgabe erfolgt in der nächsten Übung am 08.06.2009.