Gemischte lineare Modelle

Aufgabenblatt 1

4. Mai 2009

1. Bestimmen Sie für die folgenden gemischten linearen Modelle jeweils die Kovarianzmatrix $Cov(\vec{Y})$ von $\vec{Y}$ samt ihrer Eigenwerte und einer Orthonormalbasis ihrer Eigenvektoren und einer Quadratwurzel von $Cov(\vec{Y})$.

   a) $\vec{Y} = \vec{1}\mu + \vec{1}b + \vec{\epsilon}$ mit $b \sim N(0, \tau^2)$ unabhängig von $\vec{\epsilon} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$, wobei $\vec{1} = (1, \ldots, 1)'$ ein Vektor von Einsen ist.

   b)
   $$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}\vec{\beta} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{b} + \vec{\epsilon}$$
   unabhängig von $\vec{b} \sim N(\vec{0}, diag(\tau^2))$ und $\vec{\epsilon} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$.

   *c)
   $$Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \epsilon_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$
   mit $a_1, a_2, b_1, b_2, \epsilon_{11}, \ldots, \epsilon_{22}$ unabhängig und $a_i \sim N(0, \sigma_a^2)$, $b_j \sim N(0, \sigma_b^2)$, $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.

2. Beweisen Sie Satz 1.15:
   Im allgemeinen normalen linearen Regressionsmodell $\vec{Y} = \boldsymbol{X}\vec{\beta} + \vec{\epsilon}$, $\vec{\epsilon} \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \boldsymbol{V})$ mit $\boldsymbol{V}$ bekannt und vollem Rang von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{V}$ ist der Maximum-Likelihood (ML)-Schätzer für $\vec{\beta}$ gleich dem gewichteten KQ-Schätzer $\hat{\vec{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\vec{Y}$, welcher erwartungstreu für $\vec{\beta}$ ist mit Kovarianzmatrix $\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}$. Der ML-Schätzer für σ^2 ist $\hat{\sigma}^2 = \hat{\vec{\epsilon}}'\boldsymbol{V}\hat{\vec{\epsilon}}$.
   TIPP: Transformieren Sie $\vec{Y}$ so, dass ein gewöhnliches multiples lineares Regressionsmodell mit unkorrelierten Fehlern entsteht.

*3. Die Loewner-Halbordnung $\geq$ von symmetrischen $n \times n$ Matrizen ist wie folgt definiert: Es gilt $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, wenn $\vec{c}\,'\boldsymbol{A}\vec{c} \geq \vec{c}\,'\boldsymbol{B}\vec{c}$ für alle $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dies ist gleichwertig dazu, dass alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ nicht-negativ sind. Sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Kovarianzmatrizen von Zufallsvektoren $\vec{Y}_1$ bzw. $\vec{Y}_2$, so bedeutet dies, dass die Varianz jeder Linearkombination $\vec{c}\,'\vec{Y}_1$ mindestens so groß ist wie die der entsprechenden Linearkombination $\vec{c}\,'\vec{Y}_2$.

   a) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrizen des gewöhnlichen und des gewichteten KQ-Schätzers im Falle des Modells aus Aufgabe 1a), falls $\vec{Y}$ eine zweidimensionale Zufallsvariable ist und $\sigma^2 = \tau^2 = 1$.

   b) Im multiplen linearen Modell ist die Kovarianzmatrix des gewöhnlichen KQ-Schätzers minimal im Sinne der Loewner-Halbordnung unter allen linearen unverzerrten Schätzern für den Vektor der Regressionskoeffizienten $\vec{\beta}$, wenn die Kovarianzmatrix der Fehler ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist (hieraus folgt das Gauß-Markov Theorem 1.6). Folgern Sie hieraus, dass gleiches für den gewichteten KQ-Schätzer aus 1.15 bei beliebiger Kovarianzmatrix der Fehler gilt (hieraus folgt Satz 1.16).

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben können bis zum 12.05.2009, 16:00, in den Briefkasten Nr. 142 eingeworfen werden. Die Rückgabe erfolgt in der nächsten Übung am 18.05.2009.