5. Aufgabenblatt

Aufgabe 11:

Wir können Satz 3.8 nutzen, da

$$\hat{\beta}_m^{KQ} - \hat{\beta} = \left(\sum_{i=1}^m x_i x_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^m x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^m x_i x_i'\right)\left(\sum_{i=1}^m x_i x_i'\right)\beta$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m x_i x_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^m x_i \underbrace{(y_i - x_i'\beta)}_{\varepsilon_i}$$

Damit $\sqrt{m}(\hat{\beta}_m^{KQ} - \beta) = \underbrace{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i x_i'\right)^{-1}}_{\to \mathbb{W} \text{ nach Vor.}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m x_i \varepsilon_i}_{\xrightarrow{V} N(0, \sigma^2 \mathbb{W})} \xrightarrow{V} N(0, \sigma^2 \mathbb{W}^{-1})$ nach dem Satz von Slutsky

da $tr(x_i' x_i) = \|x_i\|^2 < a^2 \; \forall i \in \mathbb{N}$

und $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i x_i' \to \mathbb{W}$ nach Vor.

Aufgabe 12

a) Verwendung von Beh. 3.3 zeigt die Identifizierbarkeit. Überprüfung der Bedingungen in 3.3:

Designmatrix $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{X}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 A_1 \\ \vdots \\ Z_m A_m \end{pmatrix}$ hat vollen Rang $p \Leftrightarrow rg(\mathbb{X}'\mathbb{X}) = p$

$\mathbb{X}'\mathbb{X} = (A_1' Z_1' \; \dots \; A_m' Z_m') \begin{pmatrix} Z_1 A_1 \\ \vdots \\ Z_m A_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m A_i' \underbrace{Z_i' Z_i}_{q \times q} A_i$ hat vollen Rang p,

g.d.w. $\nexists v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ mit $v'\mathbb{X}'\mathbb{X} v = 0$.

Annahme: $0 = v'X'Xv = \sum_{i=1}^m v' \underbrace{A_i' Z_i' Z_i A_i}_{\text{pos. sem.-def.}} v \Rightarrow \forall i = 1,..,m: v' A_i' \underbrace{Z_i' Z_i}_{\text{pos.def., da voller Rang } q} A_i v = 0$

$\Rightarrow \forall i = 1,..,m: A_i v = 0 \Rightarrow v' \underbrace{\sum_{i=1}^m A_i' A_i}_{\text{pos.def., da voller Rang } p} v = 0 \Rightarrow v = 0$

Weiter hat nach Vor. mindestens eine Matrix Z_i vollen Rang q (sogar alle) und $N = \sum_{i=1}^m n_i > mq$ da $n_i \geq q \; \forall i$ und $\exists i: n_i > q$.