4. Aufgabenblatt

Aufgabe 10

b) Gewöhnliche KQ-Lösung: $\underline{\hat{\beta}_{KQ}} = (X'X)^{-1}X'\vec{y} = \frac{1}{N}\sum_{i,j} y_{ij} = \frac{16}{4} = \underline{\underline{4}} \;\left(= (X_1'X_1)^{-1}X_1'\vec{y}\right)$

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}^2_{KQ}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(\vec{y}_i - X_1\hat{\vec{\beta}}_{KQ})'(\vec{y}_i - X_1\hat{\vec{\beta}}_{KQ}) = \frac{1}{4}\left[\left\{\binom{1}{3}-\binom{4}{4}\right\}'\binom{-3}{-1} + \left\{\binom{5}{7}-\binom{4}{4}\right\}'\binom{1}{3}\right] = \frac{20}{4} = \underline{\underline{5}}$$

Fixed effect estimator: $Z_i^+ = (Z_i'Z_i)^{-1}Z_i' = (\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}' = \frac{1}{n}\vec{1}'$, $i = 1,\dots,m$

Wegen $X_i = Z_i$, $i = 1,\dots,m$, hat $W = \begin{pmatrix} X_1 & Z_1 & 0 \\ X_1 & 0 & Z_1 \end{pmatrix}$ keinen vollen Rang und $\hat{\beta}_\infty$ ist nicht eindeutig festgelegt. Wir wählen $\underline{\hat{\beta}_\infty = 4}$, $\hat{b}_1 = -2$, $\hat{b}_2 = 2$, vgl. A8c)

$$\underline{\underline{s^2_{min}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_\infty)'\underbrace{(I - Z_iZ_i^+)}_{I-\vec{1}\vec{1}'\frac{1}{n}}(\vec{y}_i - X_i\underset{\hat{\beta}_{KQ}}{\underset{\shortparallel}{\hat{\beta}_\infty}}) = \hat{\sigma}^2_{KQ} - \frac{1}{4\cdot 2}\left\{\left[\underbrace{(-3,-1)\binom{1}{1}}_{4}\right]^2 + 4^2\right\} = \underline{\underline{1}}$$

c) Nicht-konstante Terme der Profile-log-Likelihood:

$X_i = Z_i = \vec{1}$, $B = \frac{\tau^2}{\sigma^2} =: \kappa$, $V_i = \begin{pmatrix} 1+\kappa & \kappa \\ \kappa & 1+\kappa \end{pmatrix}$

Damit: $\ln(\det(V_i)) = \ln((1+\kappa)^2 - \kappa^2) = \ln(2\kappa+1)$; $V_i^{-1} = I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'$ (A7b)

$\vec{y}_i'V_i^{-1}\vec{y}_i = \vec{y}_i'\vec{y}_i - \frac{\kappa}{1+n\kappa}[\vec{1}'\vec{y}_i]^2$ $\qquad X_i'V_i^{-1}X_i = \vec{1}'V_i^{-1}\vec{1} = n - \frac{\kappa}{1+n\kappa}n^2 = \frac{n}{1+n\kappa}$

$X_i'V_i^{-1}\vec{y}_i = \vec{1}'\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{y}_i = \vec{1}'\vec{y}_i - \frac{\kappa}{1+n\kappa}n\vec{1}'\vec{y}_i = \frac{1}{1+n\kappa}\vec{1}'\vec{y}_i$

Somit

$$\ell_p(\kappa) = -\frac{1}{2}\left\{const. + m\ln(2\kappa+1) + N\ln\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\vec{y}_i'\vec{y}_i - \frac{\kappa}{1+n\kappa}[\vec{1}'\vec{y}_i]^2\right] - \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+n\kappa}\vec{1}'\vec{y}_i\right)^2\frac{1+n\kappa}{n}\right\}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{const + 2\ln(2\kappa+1) + 4\ln\left\{84 - \frac{\kappa}{1+2\kappa}\underbrace{(16+144)}_{160} - \underbrace{\left(\frac{1}{1+2\kappa}\right)^2 16^2\,\frac{1+2\kappa}{4}}_{64\cdot\frac{1}{1+2\kappa}}\right\}\right.$$

Restringierte Log-Likelihood:

$$\ell_{r,p}(\kappa) = -\frac{1}{2}\left\{const. + 2\ln(2\kappa+1) + \ln\left(\frac{2}{2\kappa+1} + \frac{2}{2\kappa+1}\right) + 3\ln\left\{\underbrace{84 - \frac{160\kappa}{1+2\kappa} - \frac{64}{1+2\kappa}}_{\frac{8\kappa+20}{2\kappa+1}}\right\}\right.$$