3. Aufgabenblatt

Aufgabe 8

a) Mögliche Anwendungsszenarien könnten wie folgt aussehen: Verschiedene Individuen (z.B. Patienten, Arbeitnehmer) erhalten jeweils mehrere (die gleichen) Mengen (Dosen einer Stimulanz (Medikament, Reiz) zu verschiedenen Zeitpunkten. Es wird ein (möglicherweise nach Transformation) linearer Zusammenhang zwischen diesen Einfluß- und der Zielgröße unterstellt, wobei die Stärke des / der Effekte unter den Individuen variieren darf und wir uns für die mittlere Effektstärke interessieren. Zeitliche Korrelationen könnten mittels $\Sigma \neq \mathbb{I}$ berücksichtigt werden.

Nachfolgend betrachten wir $\begin{pmatrix} y_{i,1} \\ y_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{(i-1)\cdot 2+1} \\ y_{(i-1)\cdot 2+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\beta + b_i) + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2,$

wobei β als Populationsmittel und $\beta + b_i$ als zufälliges Individuenmittel interpretiert werden kann.

b) Wegen

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vdots \\ \vec{y}_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_1 \end{pmatrix}}_{X} \vec{\beta} + \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \vec{\varepsilon}_m \end{pmatrix} \qquad \text{(vgl. 2.1 \& 2.2)}$$

gilt $\hat{\vec{\beta}}_{KQ} = \left(\sum_{i=1}^m X_1' X_1\right)^{-1} \sum_{i=1}^m X_1' \vec{y}_i = (m X_1' X_1)^{-1} X_1' \sum_{i=1}^m \vec{y}_i = (X_1' X_1)^{-1} X_1' \overbrace{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i}^{\bar{\vec{y}}}$

c) $X_1' \hat{\vec{e}} = X_1' (\bar{\vec{y}} - X_1 \hat{\vec{\beta}}_{KQ}) = X_1' \bar{\vec{y}} - \underbrace{X_1' X_1 (X_1' X_1)^{-1}}_{\mathbb{I}} X_1' \bar{\vec{y}} = \vec{0}$

d) $\hat{\vec{\beta}}_{gKQ}$ aus Bel. 1.15 minimiert

$$\sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_1 \vec{\beta})' V^{-1} (\vec{y}_i - X_1 \vec{\beta}) \qquad \text{(quadratische Ergänzung von } \bar{\vec{y}})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - \bar{\vec{y}})' V^{-1} (\vec{y}_i - \bar{\vec{y}})}_{\text{const.}} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^m (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})' V^{-1} (\vec{y}_i - \bar{\vec{y}})}_{= (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})' V^{-1} \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - \bar{\vec{y}}) = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^m (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})' V^{-1} (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})}_{= m (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})' V^{-1} (\bar{\vec{y}} - X_1 \vec{\beta})}$$

Wir müssen also nur den letzten Summanden minimieren:

$$(\vec{y}-X_1\vec{\beta})'V^{-1}(\vec{y}-X_1\vec{\beta}) = (\hat{\vec{e}}+X_1\hat{\vec{\beta}}_{KQ}-X_1\vec{\beta})'V^{-1}(\hat{\vec{e}}-X_1(\vec{\beta}-\hat{\vec{\beta}}_{KQ}))$$

$$= \underbrace{\hat{\vec{e}}\,'V^{-1}\hat{\vec{e}}}_{\text{const.}} - 2(\vec{\beta}-\hat{\vec{\beta}}_{KQ})'\underbrace{X_1'V^{-1}\hat{\vec{e}}}_{\overset{A4)}{=}(I-X_1(B^{-1}+X_1'X_1)^{-1}X_1')\hat{\vec{e}}\overset{c)}{=}\vec{0}} + (\vec{\beta}-\hat{\vec{\beta}}_{KQ})'X_1'V^{-1}X_1(\vec{\beta}-\hat{\vec{\beta}}_{KQ})$$

Somit wird das Minimum durch Minimieren des letzten Summanden erreicht, $\hat{\vec{\beta}}_{gKQ} = \hat{\vec{\beta}}_{KQ}$.

e) Der ML und der ReML-Schätzer für $\vec{\beta}$ entstehen dadurch, dass wir in der Formel des optimalen gewichteten KQ-Schätzers $\hat{\vec{\beta}}_{gKQ}$ nach 1.15 die unbekannte Matrix V durch ihre jeweilige Schätzung $\hat{V}$ aus der jeweiligen Likelihood ersetzen. Nun hängt nach d) $\hat{\vec{\beta}}_{gKQ}$ gar nicht von V ab und ist gleich $\hat{\vec{\beta}}_{KQ}$, was folglich auch für $\hat{\vec{\beta}}_{ML}$ und $\hat{\vec{\beta}}_{ReML}$ gelten muß.

f) Gemäß 2.7 darf es keine Vektoren $\vec{\beta}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \in \mathbb{R}^p$ (da $p=q$) geben, so dass $\vec{y}_i = X_1(\vec{\beta}+\vec{b}_1)\ \forall i=1,\dots,m$.

Dies ist gleichwertig zu $\exists i \in \{1,\dots,m\}: \vec{y}_i \notin \underbrace{\langle \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\rangle}_{\text{Spaltenraum von } X_1}$,

wobei $X_1 = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_p)$