Aufgabe 9

a) In Abwandlung des in 8 a) beschriebenen Szenarios eignet sich ein solches Modell, wenn die Effekte der Einflußvariablen auf alle Individuen gleich sind, die Ausgangsniveaus der Individuen, die bei Abwesenheit der Einflüsse (Medikamente, Reize etc) vorliegen, aber als verschieden und zufällig angenommen werden. Hierbei verzichten wir auf die Annahme gleicher Designs.

b) Es gilt hier $V_i = I + \kappa \vec{1}\vec{1}'$ und $V_i^{-1} = I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'$, vgl. A 7b).

Damit: $X_i' V_i^{-1} X_i = X_i'(\mathbb{I} - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}')X_i = X_i'X_i - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\underbrace{X_i'\vec{1}}_{n_i\bar{\vec{x}}_i}\underbrace{\vec{1}'X_i}_{n_i\bar{\vec{x}}_i'}$

$X_i' V_i^{-1}\vec{y}_i = X_i'(\mathbb{I} - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}')\vec{y}_i = X_i'\vec{y}_i - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\underbrace{X_i'\vec{1}}_{n_i\bar{\vec{x}}_i}\underbrace{\vec{1}'\vec{y}_i}_{n_i\bar{y}_i}$

Einsetzen in $\hat{\vec{\beta}}_{gLQ} = \left(\sum_{i=1}^{m} X_i'V_i^{-1}X_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{m} X_i'V_i^{-1}\vec{y}_i$ liefert die Behauptung.

c) Gemäß Bemerkung 2.6 c) kann der fixed effects Schätzer $\hat{\vec{\beta}}_{co}$ berechnet werden durch gemeinsame Minimierung bezüglich $\vec{\beta}, b_1, \dots, b_m$:

$$\underset{\vec{\beta}, b_1, \dots, b_m}{\text{Min}!} \sum_{i=1}^{m} \|\vec{y}_i - X_i\vec{\beta} - b_i\vec{1}\|_2^2, \quad (\times)$$

wobei $\hat{b}_i(\vec{\beta}) = \overline{\vec{y}_i - X_i\vec{\beta}} = \frac{1}{n_i}\vec{1}'(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta}) = \underbrace{\frac{1}{n_i}\vec{1}'\vec{y}_i}_{\bar{y}_i} - \frac{1}{n_i}\vec{1}'X_i\vec{\beta}$

Einsetzen in $(\times)$ liefert $\underset{\vec{\beta}}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{m} \|\vec{y}_i - \bar{y}_i\vec{1} - (X_i - \vec{1}\underbrace{\frac{1}{n_i}\vec{1}'X_i}_{\bar{\vec{x}}_i'})\vec{\beta}\|_2^2$,

was die Behauptung zeigt.

d) $X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$ ist die Projektionsmatrix auf den Spaltenraum von X_i. Nach Voraussetzung enthält X_i eine Spalte von Einsen, so dass der Einsenvektor auf sich selbst projiziert wird. Dies ist die erste Behauptung. Weiter: $\bar{\vec{x}}_i'(X_i'X_i)^{-1}\bar{\vec{x}}_i = n_i^{-1}\vec{1}'\underbrace{X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'\vec{1}}_{\vec{1}}n_i^{-1} = n_i^{-1}n_in_i^{-1} = n_i^{-1}$.

e) Nachrechnen der Invertierungsformel:

$$(C - d\vec{c}\vec{c}')\left(C^{-1} + d\frac{C^{-1}\vec{c}\vec{c}'C^{-1}}{1-d\vec{c}'C^{-1}\vec{c}}\right) = \mathbb{I} - d\vec{c}\vec{c}'C^{-1} - d\vec{c}\vec{c}'d\frac{C^{-1}\vec{c}\vec{c}'C^{-1}}{1-d\vec{c}'C^{-1}\vec{c}} + d\frac{\vec{c}\vec{c}'C^{-1}}{1-d\vec{c}'C^{-1}\vec{c}}$$

$$= \mathbb{I} - d\vec{c}\vec{c}'C^{-1}\left[\mathbb{I} - \frac{d\vec{c}\vec{c}'C^{-1}}{1-d\vec{c}'C^{-1}\vec{c}} + \mathbb{I}\left(-1+d\vec{c}'C^{-1}\vec{c}+1\right)\right] = \mathbb{I}$$

Nun gilt nach Teil b):

$$\hat{\vec{\beta}}_{gKQ} = \underbrace{\left(X_1'X_1 - \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'\right)^{-1}}\left(X_1'\bar{\vec{y}} - \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\bar{\vec{x}}\bar{y}\right) \quad \text{mit } \bar{y} = \vec{1}'\bar{\vec{y}}/n$$

$$= (X_1'X_1)^{-1} + \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\frac{(X_1'X_1)^{-1}\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'(X_1'X_1)^{-1}}{1-\frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\underbrace{\bar{\vec{x}}'(X_1'X_1)^{-1}\bar{\vec{x}}}_{\frac{1}{n}\vec{1}'\underbrace{X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\vec{1}}_{=\vec{1}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}}} = M + \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\frac{M\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'M}{\frac{1}{1+n\kappa}}$$

mit $M = (X_1'X_1)^{-1}$

$$= (M + n^2\kappa M\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'M)\left(X_1'\bar{\vec{y}} - \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}\bar{\vec{x}}\bar{y}\right)$$

$$= MX_1'\bar{\vec{y}} - \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa}M\bar{\vec{x}}\bar{y} + n^2\kappa M\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'MX_1'\bar{\vec{y}} - \frac{n^4\kappa^2}{1+n\kappa}M\bar{\vec{x}}\underbrace{\bar{\vec{x}}'M\bar{\vec{x}}}_{\frac{1}{n},\text{ siehe oben}}\bar{y}$$

$$= MX_1'\bar{\vec{y}} - \underbrace{\left(\frac{n^2\kappa}{1+n\kappa} + \frac{n^3\kappa^2}{1+n\kappa}\right)}_{n^2\kappa}M\bar{\vec{x}}\bar{y} + n^2\kappa M\bar{\vec{x}}\bar{\vec{x}}'MX_1'\bar{\vec{y}}$$

$$= MX_1'\bar{\vec{y}} - n^2\kappa M\bar{\vec{x}}\left(\bar{y} - \underbrace{\bar{\vec{x}}'MX_1'}_{\frac{1}{n}\vec{1}'X_1MX_1'}\bar{\vec{y}}\right) = \underline{MX_1'\bar{\vec{y}}} \quad \text{da } \bar{y} - \frac{1}{n}\vec{1}'X_1MX_1' = \vec{0}$$

Dies ist aber der gewöhnliche KQ-Schätzer:

$$\hat{\vec{\beta}}_{KQ} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'\bar{\vec{y}} = \left(\sum_{i=1}^{m}X_1'X_1\right)^{-1}\sum_{i=1}^{m}X_1'\vec{y}_i$$

f) Der ML-Schätzer existiert nach 2.7 genau dann, wenn es $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^p, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ <u>nicht</u> gibt, so dass $\vec{y}_i = X_1\vec{\beta} + b_i\vec{1} \quad \forall i = 1, \ldots, m$

$$\Leftrightarrow \vec{y}_i - b_i\vec{1} = X_1\beta \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

$$\Leftrightarrow \vec{y}_i - \vec{1}(b_i + \beta_p) = \vec{x}_1\beta_1 + \ldots + \vec{x}_{p-1}\beta_{p-1} \quad \forall i = 1, \ldots, m,$$

mit $X_1 = (\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_{p-1}\ \vec{1})$

Somit dürfen die zentrierten Beobachtungsvektoren $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ Folgendes nicht: Sie dürfen nicht alle im Spaltenraum von X_1 liegen und nach Zentrieren gleich sein.