Lösungsvorschlag 2. Aufgabenblatt

Aufgabe 4

a) Laut Hinweis gilt bei Entwicklung nach dem oberen linken und dem unteren rechten Block:

$$\det\begin{pmatrix} I & -A \\ B & I \end{pmatrix} = \det(I)\det(I - BI^{-1}(-A)) = \det(I+BA)$$
$$= \det(I)\det(I-(-A)I^{-1}B) = \det(I+AB) \quad \#$$

b) Es gilt $\det(V_i) = \det(I + Z_i B Z_i') \overset{a)}{=} \det(I + B Z_i' Z_i)$

$$= \det(B(B^{-1} + Z_i' Z_i)) = \det(B)\det(B^{-1} + Z_i' Z_i)$$

damit $\ln(\det(V_i)) = \ln(\det(B)) + \ln(\det(B^{-1} + Z_i' Z_i))$

$$= \ln(\det(B^{-1} + Z_i' Z_i)) - \ln(\det(B^{-1}))$$

Die Formel für V_i^{-1} überprüfen wir direkt:

$$V_i(I - Z_i(B^{-1} + Z_i' Z_i)^{-1} Z_i') = (I + Z_i B Z_i')(I - Z_i(B^{-1} + Z_i' Z_i)^{-1} Z_i')$$
$$= I + Z_i B Z_i' - Z_i(B^{-1} + Z_i' Z_i)^{-1} Z_i' - Z_i B Z_i' Z_i (B^{-1} + Z_i' Z_i)^{-1} Z_i'$$
$$= I + Z_i B Z_i' - Z_i B \underbrace{(B^{-1} + Z_i' Z_i)(B^{-1} + Z_i' Z_i)^{-1}}_{=I} Z_i'$$
$$= I,$$

was die Behauptung beweist.

Aufgabe 6

a) $Z_i B Z_i'$ ist wegen $\vec{x}' Z_i B Z_i' \vec{x} = (Z_i'\vec{x})' B (Z_i'\vec{x}) \geq 0 \;\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ positiv (semi)definit, da selbiges für B gilt (Symmetrie ist klar).

$\Rightarrow I + Z_i B Z_i' \geq I \Rightarrow (I + Z_i B Z_i')^{-1} \leq I^{-1} = I$, was die erste Ungleichheit zeigt (aus A, B, C positiv semi-definit mit $A \geq B$ folgt $A + C \geq B + C$ und $A^{-1} \leq B^{-1}$ falls B^{-1} existiert).

Außerdem:

$$(I - Z_i Z_i^+)(I + Z_i B Z_i') = I + Z_i B Z_i' - Z_i Z_i^+ - Z_i \underbrace{Z_i^+ Z_i}_{I} B Z_i' = I - Z_i Z_i^+ \leq I$$

$$\Rightarrow I - Z_i Z_i^+ \leq (I + Z_i B Z_i')^{-1}$$

b) Für $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^p$ beliebig gilt nach a) (mit $\hat{V}_i = I + Z_i \hat{B} Z_i'$)

$$\sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})'(I - Z_i Z_i^+)(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta}) \leq \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})'\hat{V}_i^{-1}(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta}) \leq \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})'(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})$$

Wenn wir nun aber jeweils das $\vec{\beta} = \hat{\beta}$ suchen, welches die rechte Seite der Ungleichung minimiert, und in die rechte und die linke Seite einsetzen, so bleibt die jeweilige Ungleichung wahr, wobei die linke Seite aber immer noch größer gleich der jeweiligen Minimalstelle ist:

$$\sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_\infty)'(I - Z_i Z_i^+)(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_\infty) = \min_\beta \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})'(I - Z_i Z_i^+)(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})$$

$$\leq \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{ML})'(I - Z_i Z_i^+)(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{ML})$$

$$\overset{a)}{\leq} \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{ML})'\hat{V}_i^{-1}(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{ML}) = \min_\beta \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})'V_i^{-1}(\vec{y}_i - X_i\vec{\beta})$$

$$\leq \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{KQ})'V_i^{-1}(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{KQ})$$

$$\overset{a)}{\leq} \sum_{i=1}^m (\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{KQ})'(\vec{y}_i - X_i\hat{\beta}_{KQ})$$

Die Schätzungen von σ^2 bekommen wir aber einfach durch Teilen durch N.