Aufgabe 5

a) $\binom{A}{M}\vec{y}$ ist multivariat normalverteilt; es reicht also die Unkorreliertheit von $A\vec{y}$ und $M\vec{y}$ nachzuweisen, um die Unabhängigkeit zu beweisen: $Cov(M\vec{y}, A\vec{y}) = M\,Cov(\vec{y})A' = M\sigma^2 \underbrace{VV^{-1}}_{I} X(X'V^{-1}X)^{-1} = \sigma^2 \underbrace{MX}_{0}(X'V^{-1}X)^{-1} = 0$

b) Dank a) genügt es $CX = 0$ zu zeigen:

$CX = \underbrace{CC'}_{I}CX = CHX = 0$ wegen $HX = [I - X(X'X)^{-1}X']X = X - X\underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I} = 0$

d) $\det\binom{C}{A} = \sqrt{\det[\binom{C}{A}(C', A')]} = \sqrt{\det\begin{pmatrix} I & CA' \\ AC' & AA' \end{pmatrix}} = \sqrt{\underbrace{\det(I)}_{1}\det(AA' - A\underbrace{C'I^{-1}C}_{H}A')}$

$= \sqrt{\det(A(I-H)A')} = \sqrt{\det[\underbrace{(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}X}_{I}(X'X)^{-1}\underbrace{X'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}}_{I}]}$

$= \sqrt{\det[(X'X)^{-1}]} = [\det(X'X)]^{-\frac{1}{2}}$

e) Sei f_y die Dichte von $\vec{y}$, $f_{\hat\beta}$ die Dichte von $\hat\beta$, f_{Cy} die Dichte von $C\vec{y}$.
Da $\hat\beta$ und $C\vec{y}$ unabhängig voneinander sind, gilt

$f_y(\vec{y}) = f_{\hat\beta}(Ay)\cdot f_{Cy}(Cy)\cdot \det\binom{C}{A}$ (Transformationssatz für Dichten)

$\Rightarrow f_{Cy}(Cy) = \frac{f_y(y)}{f_{\hat\beta}(Ay)}\sqrt{\det(X'X)}$

c) Hat X vollen Spaltenrang p, so spannen die Spalten von X einen p-dim. Unterraum von $\mathbb{R}^N$ auf. Das orthogonale Komplement hierzu entspricht der Menge aller Kontraste und ist damit ein Unterraum der Dimension $N-p$. Wegen $CC' = I_{N-p}$ müssen die $N-p$ Spalten von C' orthogonal zueinander und normiert sein, und zudem wegen $CX = 0$ orthogonal zu den Spalten von X sein (Spalten von C' sind Zeilen von C transponiert). Dies beweist die Behauptung.
Beachte: Hier wurde über die Spalten von C' statt über die Zeilen von C argumentiert, da erstere im gleichen Raum wie die Spalten von X liegen, nämlich im Spaltenraum $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 7

a) Hier gilt $m = p = q = 1$. Laut Bem. 2.7 müssen wir nur überprüfen, dass es kein $\mu \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{y} = \vec{1}\mu + \vec{1}b = \vec{1}(\mu + b)$.
Dies ist offensichtlich der Fall, wenn nicht alle Komponenten von $\vec{y}$ gleich sind.

b) Es gilt $V = I + \frac{\tau^2}{\sigma^2}\vec{1}\vec{1}' = I + \kappa \mathbb{1}$, wobei $\kappa = \frac{\tau^2}{\sigma^2}$ und $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$V\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\mathbb{1}\right) = (I + \kappa\mathbb{1})\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\mathbb{1}\right) = I + \kappa\mathbb{1} - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\mathbb{1} - \frac{\kappa^2}{1+n\kappa}n\mathbb{1}$$

$$= I + \underbrace{\frac{\kappa + n\kappa^2 - \kappa - n\kappa^2}{1+n\kappa}}_{=0}\mathbb{1}$$

c) Nach Aufgabe 1a) gilt $\ln(\det(V)) = \ln(1+n\kappa)$, da $I + \kappa\mathbb{1}$ die Eigenwerte $1+n\kappa$ (einfach) und 1 ($(n-1)$-fach) hat.

Weiter: $X'V^{-1}X = \vec{1}'\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{1} = n - \frac{n^2\kappa}{1+n\kappa} = n\left(1 - \frac{n\kappa}{1+n\kappa}\right)$

$X'V^{-1}\vec{y} = \vec{1}'\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{y} = \left(1 - \frac{n\kappa}{1+n\kappa}\right)\underbrace{\vec{1}'\vec{y}}$ Summe der Einträge von $\vec{y}$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \left[n\left(1 + \frac{n\kappa}{1+n\kappa}\right)\right]^{-1}\left(1 - \frac{n\kappa}{1+n\kappa}\right)\vec{1}'\vec{y} = \frac{1}{n}\vec{1}'\vec{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j = \bar{y}, \text{ vgl. } 2.2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\vec{y}_i - \bar{y}\vec{1})'\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'\right)(\vec{y}_i - \bar{y}\vec{1})$$

$$= \frac{1}{n}(\vec{y}_i - \bar{y}\vec{1})'(\vec{y} - \bar{y}\vec{1}) - \frac{\kappa}{n+n^2\kappa}\underbrace{(\vec{y} - \bar{y}\vec{1})'\vec{1}}_{\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y}) = 0}\vec{1}'(\vec{y} - \bar{y}\vec{1})$$

Somit müssen wir die Profile-log Likelihood bezüglich κ maximieren:

$l_p(\kappa) = \text{const.} - \frac{1}{2}\ln(1+n\kappa)$, was durch $\kappa = 0 = \tau^2$ erreicht wird (d.h. $B = \tau^2$ nicht positiv definit)

da $\vec{y}'V^{-1}\vec{y} = \vec{y}'\left(I - \frac{\kappa}{1+n\kappa}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{y} = \vec{y}'\vec{y} - \frac{\kappa}{1+n\kappa}(n\bar{y})^2$

und $\underbrace{(X'V^{-1}\vec{y})'}_{\text{s.o.}}\underbrace{(X'V^{-1}X)^{-1}(X'V^{-1}\vec{y})}_{=\hat{\mu}=\bar{y}} = \left(1 - \frac{n\kappa}{1+n\kappa}\right)n\bar{y}\cdot\bar{y}$

$\vec{y}'\vec{y} - n\bar{y}^2 = ns^2$