

Der Mixed-Schätzer

Seminar: Ausgewählte Kapitel der Regressionsanalyse

Dozent: Prof. Dr. G. Trenkler

Vortragender: Philipp Grafenschäfer

18.12.08

- 1 Motivation
- 2 Grundlagen der Regressionsanalyse
- 3 Das Mixed Modell
 - Stochastische, lineare Restriktion
 - Definition des Mixed Modells
- 4 Der Mixed-Schätzer
 - Definition und Eigenschaften des Mixed-Schätzers
 - Vergleich mit dem unrestringierten VKQ-Schätzer
 - Der Mixed-Schätzer bei fehlerhafter Vorabinformation
 - Zusammenhang zwischen dem Ridge-Schätzer und dem Mixed-Schätzer
- 5 Ausblick
- 6 Literaturverzeichnis

Motivation

- Manchmal ist im linearen Modell Vorabinformation über den zu schätzenden Parametervektor β verfügbar.
- Falls die Vorabinformation in der linearen Form

$$r = R\beta + \phi$$

dargestellt werden kann, eignet sich das Mixed-Modell um die Vorabinformation bei der Schätzung von β zu berücksichtigen.

- Der optimale Schätzer im Mixed Modell ist der Mixed-Schätzer.

Motivation

Cobb- Douglas- Produktionsfunktion

$$y = \beta_0 + X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2},$$

wobei y =Output, X_1 =Arbeit und X_2 =Kapital.

- Lineares Modell:

$$\log(y) = \beta_0 + \beta_1 \log(X_1) + \beta_2 \log(X_2)$$

- Häufige Annahme: konstante Skalenerträge

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

- Darstellung in der Form $r = \mathbf{R}\beta$ mit $r = 1$ und $\mathbf{R} = (1, 1)$
- Abschwächung der Annahme konstanter Skalenerträge:

$$r = \mathbf{R}\beta + \phi \text{ mit } r = 1, \mathbf{R} = (1, 1) \text{ und } E(\phi) = 0.$$

Klassisches lineares Modell

Das lineare Modell $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ heißt klassisches lineares Modell, falls gilt:

Annahmen

- (i) \mathbf{X} ist eine nicht-stochastische $(n \times p)$ - Matrix, wobei p die Dimension des Vektors $\boldsymbol{\beta}$ ist.
- (ii) Die Matrix \mathbf{X} hat Rang p , also vollen Spaltenrang.
- (iii) Die Elemente des $n \times 1$ Vektors \mathbf{y} sind beobachtbare Zufallsvariablen.
- (iv) Die Elemente des $n \times 1$ Vektors $\boldsymbol{\epsilon}$ sind nicht-beobachtbare Zufallsvariablen. Weiterhin gilt:
 $E(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ und $Cov(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}$, wobei $\sigma^2 > 0$ ist.
Es wird also angenommen, dass die Fehler unkorreliert sind.
Schreibweise: $\boldsymbol{\epsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$

Generalisiertes lineares Modell

Das lineare Modell $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ heißt klassisches lineares Modell, falls gilt:

Annahmen

- (i)-(iii) des klassischen linearen Modells
- (iv*) Die Elemente des $n \times 1$ Vektors $\boldsymbol{\epsilon}$ sind nicht-beobachtbare Zufallsvariablen. Weiterhin gilt:
 $E(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$ und $Cov(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \mathbf{W}$.
 \mathbf{W} ist eine bekannte, symmetrische, positiv definite $(n \times n)$ - Matrix und $\sigma^2 > 0$.
- Beim generalisierten linearen Modell wird also nicht vorausgesetzt, dass die Fehler unkorreliert sind.
- Schreibweise: $\boldsymbol{\epsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{W})$

BLUE

Gauß-Markov-Theorem

Im klassischen linearen Modell ist der KQ-Schätzer BLUE. Es gilt:

- $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$
- $\text{Cov}(\hat{\beta}_{KQ}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Gauß-Markov-Aitken Theorem

Im generalisierten linearen Modell ist der VKQ-Schätzer BLUE. Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{VKQ} &= \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})^{-1}}_{=: \mathbf{S}} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_{VKQ}) &= \sigma^2\mathbf{S}^{-1}.\end{aligned}$$

Lineare Restriktion

- Betrachte das lineare Modell $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$.
- Verfügbarkeit von Vorabinformation über $\boldsymbol{\beta}$ in der linearen Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}.$$

- \mathbf{r} ist ein realisierter $(m \times 1)$ - Zufallsvektor.
- \mathbf{R} ist eine feste $(m \times p)$ - Matrix mit $rg(\mathbf{R}) = m \leq p$.

Der restringierte KQ-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ} - \mathbf{r})$$

Beispiel

Kenntnis über das Verhältnis der Komponenten von β

- $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$
- Verhältnis der Komponenten von β :

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 6 : 2 : 1$$
$$\Rightarrow \beta_2 = 2\beta_3 \text{ und } \beta_1 = 3\beta_2.$$

- Darstellung der Vorabinformation in der Form $\mathbf{r} = \mathbf{R}\beta$ mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stochastische, lineare Restriktion

- Häufig wird die Vorabinformation durch einen zufälligen Fehler ϕ verzerrt, so dass diese durch die Gleichung

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi}$$

dargestellt werden kann.

- Für den Fehlervektor $\boldsymbol{\phi}$ gilt:

$$\boldsymbol{\phi} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{V}), \mathbf{V} > \mathbf{0}.$$

$$E(\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}') = \mathbf{0}.$$

- \mathbf{V} wird als bekannt vorausgesetzt.

Das Mixed Modell

- Betrachte das generalisierte lineare Modell

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \text{ mit } \boldsymbol{\epsilon} \sim (0, \sigma^2 \mathbf{W}).$$

- Durbin (1953) versuchte, sowohl die Stichprobeninformation als auch die Vorabinformation über $\boldsymbol{\beta}$ simultan zu verwenden, indem er schrittweise Schätzer für die einzelnen Parameter generierte.
- Theil und Goldberger (1961) fanden eine allgemeinere Methode, indem Sie die beiden linearen Modelle

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \text{ und } \mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi}$$

zum so genannten Mixed-Modell kombinierten.

Das Mixed Modell

Definition

- Das Mixed Modell ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \epsilon \\ \phi \end{pmatrix}.$$

- Mit

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}, \tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \phi \end{pmatrix}$$

lautet das Mixed Modell

$$\tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\epsilon},$$

wobei $rg(\tilde{X}) = p$.

Das Mixed Modell

- Da die Fehler ϵ und ϕ als unkorreliert vorausgesetzt werden, gilt

$$\tilde{\epsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \widetilde{\mathbf{W}}),$$

wobei

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2} \mathbf{V} \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{W}, \mathbf{V} > \mathbf{0} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{W}} > \mathbf{0}$.
 - Das Mixed Modell erfüllt die Annahmen (i)- (iii) und (iv*).
- Das Mixed Modell ist ein generalisiertes lineares Modell.

Der Mixed-Schätzer

Definition

Der VKQ-Schätzer im Mixed Modell heißt Mixed-Schätzer und ist wie folgt definiert:

$$\hat{\beta}_{mix} = (\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}.$$

Der Mixed-Schätzer

Einsetzen der Originalmatrizen

Definiert man \mathbf{S} durch $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$,
so gilt mit den Originalmatrizen \mathbf{y} , \mathbf{X} und \mathbf{W}

$$\hat{\beta}_{mix} = (\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$$

Der Mixed-Schätzer

Einsetzen der Originalmatrizen

Definiert man \mathbf{S} durch $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$,
so gilt mit den Originalmatrizen \mathbf{y} , \mathbf{X} und \mathbf{W}

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{mix} &= (\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

Einsetzen der Originalmatrizen

Definiert man \mathbf{S} durch $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$,
so gilt mit den Originalmatrizen \mathbf{y} , \mathbf{X} und \mathbf{W}

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{mix} &= (\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{V}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{V}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

Einsetzen der Originalmatrizen

Definiert man \mathbf{S} durch $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$,
so gilt mit den Originalmatrizen \mathbf{y} , \mathbf{X} und \mathbf{W}

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_{mix} &= (\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{W}}^{-1}\tilde{\mathbf{y}} \\
 &= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-2}\mathbf{V} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \\
 &= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{V}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{V}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \\
 &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \right]^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r})$$

Der Mixed-Schätzer

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= \left[\sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right) \right]^{-1} \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= \left[\sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right) \right]^{-1} \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right)^{-1} \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \sigma^2\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= \left[\sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right) \right]^{-1} \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right)^{-1} \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Der Mixed-Schätzer

Definition mit Originalmatrizen

$$\hat{\beta}_{mix} = (\sigma^{-2}\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}),$$

wobei \mathbf{S} durch $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}$ definiert ist.

Der Mixed-Schätzer

Kovarianzmatrix des Mixed-Schätzers

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) &= \sigma^2 (\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{S} + \sigma^2 \mathbf{R}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R})^{-1} \\ &= (\sigma^{-2} \mathbf{S} + \mathbf{R}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R})^{-1}.\end{aligned}$$

Optimalität des Mixed-Schätzers

Aus dem Gauß-Markov-Aitken Theorem folgt, dass der Mixed-Schätzer im Mixed-Modell BLUE ist, d.h für alle linearen, unverzerrten Schätzer $\hat{\beta}$ gilt:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) \leq \text{Cov}(\hat{\beta}).$$

Mixed-Schätzer im klassischen linearen Modell

Genügt das unrestringierte Modell $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ dem klassischen linearen Modell, so gilt:

Der Mixed-Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix} &= (\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{I}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{I}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) \\ &= (\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}).\end{aligned}$$

Die Kovarianzmatrix des Mixed-Schätzers

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix}) &= (\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{I}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1} \\ &= (\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}.\end{aligned}$$

Vergleich von $\hat{\beta}_{mix}$ mit dem unrestringierten VKQ-Schätzer

Der unrestringierte VKQ-Schätzer

Bei Betrachtung des unrestringierten generalisierten linearen Modells $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$ gilt:

$$\hat{\beta}_{VKQ} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{VKQ}) = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1}.$$

Vergleich der Kovarianzmatrizen von $\hat{\beta}_{VKQ}$ und $\hat{\beta}_{mix}$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{VKQ}) - \text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} - (\sigma^{-2} \mathbf{S} + \mathbf{R}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R})^{-1} \geq \mathbf{0}$$

Die Kovarianzmatrix des optimalen Schätzers im Mixed Modell reduziert sich im Vergleich zum optimalen Schätzer im unrestringierten linearen Modell.

Beispiel

Datengenerierung

Die folgenden Realisationen von \mathbf{y} wurden in R (R Development Core Team (2008)) anhand der Formel

$$y_i = 2x_i^{(1)} + 3x_i^{(2)} + 4x_i^{(3)} + \epsilon_i \text{ mit } \epsilon_i \underset{uiv}{\sim} N(0, 1) \ (i = 1, \dots, 5)$$

generiert. Das klassische lineare Modell ergibt sich durch

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 23.67 \\ 28.81 \\ 43.36 \\ 21.86 \\ 48.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Bekanntes Verhältnis der Komponenten von β

- Bekannt: $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 3$.
- Darstellung der Vorabinforamtion in der linearen Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\beta + \phi$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Berechnung des KQ-Schätzers

$$\hat{\beta}_{KQ} = \begin{pmatrix} 1.69 \\ 3.35 \\ 4.02 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Mixed-Schätzers

Mit $\sigma^2 = 1$ und $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$ berechnet sich der Mixed-Schätzer zu

$$\hat{\beta}_{mix} = \begin{pmatrix} 1.92 \\ 3.08 \\ 4.09 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}_{KQ}$

Mit $\sigma^2 = 1$ gilt:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{KQ}) = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.35 & 0.05 \\ -0.35 & 0.48 & -0.16 \\ 0.05 & -0.16 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}_{mix}$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) = \begin{pmatrix} 0.11 & -0.07 & -0.01 \\ -0.07 & 0.13 & -0.06 \\ -0.01 & -0.06 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Bekanntes Verhältnis der Komponenten von β

- Bekannt: $\beta_1:\beta_3=1:2$
- Darstellung der Vorabinforamtion in der linearen Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\beta + \phi$$
$$\Leftrightarrow 0 = (2, 0, -1) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \phi_1$$

Beispiel

Berechnung des KQ-Schätzers

$$\hat{\beta}_{KQ} = \begin{pmatrix} 1.69 \\ 3.35 \\ 4.02 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Mixed-Schätzers

$$\hat{\beta}_{mix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 3.13 \\ 4.02 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Kovarianzmatrix des KQ-Schätzers

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{KQ}) = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.35 & 0.05 \\ -0.35 & 0.48 & -0.16 \\ 0.05 & -0.16 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix des Mixed-Schätzers

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) = \begin{pmatrix} 0.08 & -0.12 & 0.05 \\ -0.12 & 0.28 & -0.16 \\ 0.05 & -0.16 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Verfügbarkeit einer alten Schätzung für $\hat{\beta}$

- Wenn eine frühere Schätzung $\hat{\beta}_{old}$ für β verfügbar ist, kann angenommen werden, dass gilt:

$$\hat{\beta}_{old} = \beta + \phi,$$

mit $E(\phi) = 0$.

- Für $R = I$ und $r = \hat{\beta}_{old}$ folgt:

$$\hat{\beta}_{old} = \beta + \phi = R\beta + \phi.$$

Beispiel

Berechnung des KQ-Schätzers

$$\hat{\beta}_{KQ} = \begin{pmatrix} 1.69 \\ 3.35 \\ 4.02 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Mixed-Schätzers

Mit $\hat{\beta}_{old} = \begin{pmatrix} 2.30 \\ 2.39 \\ 4.31 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{V} = \text{Cov}(\hat{\beta}_{old})$ gilt:

$$\hat{\beta}_{mix} = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 2.87 \\ 4.17 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Kovarianzmatrix des KQ-Schätzers

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{KQ}) = \begin{pmatrix} 0.35 & -0.35 & 0.05 \\ -0.35 & 0.48 & -0.16 \\ 0.05 & -0.16 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Kovarianzmatrix des Mixed-Schätzers

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}) = \begin{pmatrix} 0.18 & -0.18 & 0.03 \\ -0.18 & 0.24 & -0.08 \\ 0.03 & -0.08 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Datengenerierung

- 20 Realisationen von \mathbf{y} anhand der Formel

$$y_i = 2x_i^{(1)} + 3x_i^{(2)} + \epsilon_i \quad (\epsilon_i \underset{u.i.v.}{\sim} N(0, 1); i = 1, \dots, 5)$$

- Vorabinformation über $\boldsymbol{\beta}$: $\beta_1 = 2$ und $\beta_2 = 3$
- $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$

Graphische Darstellung von $\hat{\beta}_{mix}$ und $\hat{\beta}_{KQ}$

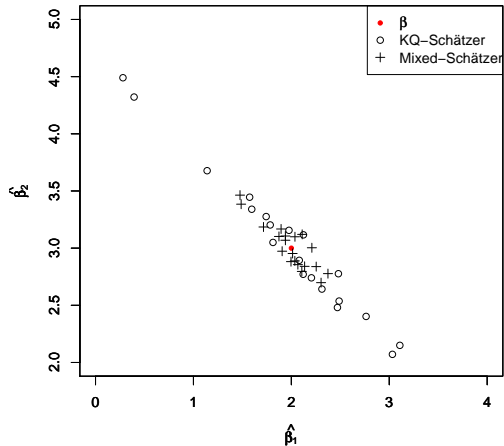


Abbildung 1: Mixed-und KQ-Schätzer für 20 Realisationen von y .

Abhängigkeit des Mixed-Schätzers von σ^2

$$\hat{\beta}_{mix}(\sigma^2) = (\sigma^{-2}\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r})$$

hängt von σ^2 ab und kann daher in der Praxis nicht berechnet werden
→ 3 Vorschläge zur Berechnung bei unbekanntem σ^2 .

1. Vorschlag: Ersetzung von σ^2 durch s^2

Theil (1963) schlug vor, die unbekannte Varianz σ^2 durch die erwartungstreue Schätzung s^2 mit

$$s^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{VKQ})' \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{VKQ})$$

zu ersetzen. Der Mixed-Schätzer ergibt sich in diesem Fall durch

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix} = (s^{-2} \mathbf{S} + \mathbf{R}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R})^{-1} (s^{-2} \mathbf{X}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{R}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}).$$

1. Vorschlag: Ersetzung von σ^2 durch s^2

- Durch die Ersetzung von σ^2 durch s^2 ist jedoch nicht mehr gewährleistet, dass die Differenz

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{VKQ}) - \text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}(s^2))$$

nichtnegativ definit ist.

- Es kann aber gezeigt werden, dass $\hat{\beta}_{mix}(s^2)$ bei ausreichendem Stichprobenumfang eine gute Approximation für $\hat{\beta}_{mix}(\sigma^2)$ in dem Sinne darstellt, dass gilt:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{VKQ}) - \text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}(s^2)) \geq \mathbf{0}.$$

- $\hat{\beta}_{mix}(s^2)$ ist approximativ der optimale Schätzer.
- Näheres kann in Nagar und Kakwani (1964) nachgelesen werden.

2. Vorschlag: Ersetzung von σ^{-2} durch eine Konstante

- Ersetze σ^{-2} durch eine Konstante c ($c \geq 0$)
- Mit

$$\mathbf{M} = (c\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}) \text{ gilt:}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix}(c) = \mathbf{M}^{-1}(c\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}).$$

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix}(c)) = \mathbf{M}^{-1}(c^2\sigma^2\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})\mathbf{M}^{-1}.$$

Wahl von c

- Da $\hat{\beta}_{mix}(\sigma^2)$ BLUE ist, gilt natürlich:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}(c)) - \text{Cov}(\hat{\beta}_{mix}(\sigma^2)) \geq \mathbf{0}.$$

- Die Wahl der Konstante c erfolgt so, dass der Schätzer $\hat{\beta}_{mix}(c)$ besser ist als der unrestringierte VKQ-Schätzer.

Konvergenz von $\hat{\beta}_{mix}(c)$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\hat{\beta}_{mix}(c)) = \hat{\beta}_{VKQ} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} (\hat{\beta}_{mix}(c)) = \tilde{\beta}_R = \hat{\beta}_{VKQ} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' (\mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}')^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R} \hat{\beta}_{VKQ}),$$

wobei $\tilde{\beta}_R$ dem bedingten restringierten VKQ-Schätzer entspricht (vgl. Toutenburg, 1982)

Optimale Wahl von c

Theorem 1

Definiere

$$\mathbf{B}(c, \sigma^2) = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} + (2c\sigma^2 - 1)(\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}.$$

Sind dann σ_1^2 und σ_2^2 bekannt und erfüllen die Bedingungen

- (i) $0 < \sigma_1^2 < \sigma^2 < \sigma_2^2 < \infty$
- (ii) $\mathbf{B}(0, \sigma_2^2)$ ist negativ definit,

so ist die Klasse der Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}(c)$, die ein kleineres Risiko als der unrestringierte VKQ-Schätzer haben, durch

$$\{\hat{\boldsymbol{\beta}}(c) | c \geq \sigma_1^{-2}\}$$

gegeben.

Optimale Wahl von c

Theorem 2

Ist σ_1^2 bekannt und erfüllt die Bedingungen

- (i) $0 < \sigma_1^2 < \sigma^2$
- (ii) $\mathbf{B}(0, \sigma_1^2) \geq \mathbf{0}$,

so ist die Klasse der Schätzer $\hat{\beta}(c)$, die ein kleineres Risiko als der unrestringierte VKQ-Schätzer haben, durch

$$\{\hat{\beta}(c) | c \geq 0\}$$

gegeben.

Die Beweise zu den Theoremen und Näheres zur optimalen Wahl von c kann in Toutenburg (1982) nachgelesen werden.

3. Vorschlag: Proportionalität der Varianzen von ϵ und ϕ

- Häufig ist es möglich, die Vorabinformation über β in der Form zu restringieren, dass die Varianzen von ϵ und ϕ proportional zueinander angenommen werden können. Die Matrix \mathbf{V} lässt sich dann in der Form

$$\mathbf{V} = \frac{\sigma^2}{k} \mathbf{W}$$

darstellen. Bei k handelt es sich um eine Konstante.

- In diesem Fall gilt:

$$\hat{\beta}_{mix}(k) = (\mathbf{S} + k\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y} + k\mathbf{R}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}).$$

Mix von exakter und stochastischer linearer Restriktion

- Bisher:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi} \text{ mit } \boldsymbol{\phi} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{V}), \mathbf{V} > \mathbf{0}$$

- Jetzt: $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$ mit

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\phi} \text{ mit } \boldsymbol{\phi} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{V}_1) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2\boldsymbol{\beta}_2 \quad (2)$$

- Kombination von (1) und (2) ergibt

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi} \text{ mit } \boldsymbol{\phi} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{V}) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ singularär ist.}$$

Mix von exakter und stochastischer linearer Restriktion

Theorem 3

In der Klasse $\{\hat{\beta} = \mathbf{C}'_1 \mathbf{y} + \mathbf{C}'_2 \mathbf{r}\}$ ist

$$\hat{\beta}_R(\mathbf{V}) = \hat{\beta}_{VKQ} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' [\sigma^{-2} \mathbf{V} + \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R} \hat{\beta}_{VKQ})$$

unter der Restriktion (3) BLUE.

Für die Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}_R(V)$ gilt:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_R(\mathbf{V})) = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} - \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' [\sigma^{-2} \mathbf{V} + \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1}.$$

Mixed-Schätzer bei fehlerhafter Vorabinformation

- Bisher:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi} \text{ mit } \boldsymbol{\phi} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{V})$$

mit

$$E(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$$

- Jetzt: Die Annahme $E(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$ wird nicht eingehalten wird, d.h.

$$E(\mathbf{r}) \neq \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$$

- Die wahre Vorabinformation lässt sich in der (unbekannten) Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{g} + \boldsymbol{\phi} \quad (\mathbf{g} \neq \mathbf{0})$$

darstellen.

Der Mixed-Schätzer bei fehlerhafter Vorabinformation

Im Folgenden: klassisches lineares Modell mit $\phi \sim (\mathbf{0}, (\sigma^2/k)\mathbf{I})$.

Berechnung des Mixed-Schätzers

$$\hat{\beta}_{mix}(k) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{R}'\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y} + k\mathbf{R}'\mathbf{r}).$$

Mit $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{R}'\mathbf{R})^{-1}$ gilt

$$\hat{\beta}_{mix}(k) = \mathbf{Z}(\mathbf{X}'\mathbf{y} + k\mathbf{R}'\mathbf{r}).$$

Der Mixed-Schätzer bei fehlerhafter Vorabinformation

Verzerrtheit des Mixed-Schätzers

- Durch die Restriktion

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{g} + \boldsymbol{\phi} \quad (\mathbf{g} \neq \mathbf{0})$$

ist der Mixed-Schätzer nicht mehr erwartungstreu für $\boldsymbol{\beta}$.

- Es gilt:

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix}(k)) &= E[\mathbf{Z}(\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{X}'\boldsymbol{\epsilon} + k\mathbf{R}'\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{R}'\mathbf{g} + k\mathbf{R}'\boldsymbol{\phi})] \\ &= \boldsymbol{\beta} + k\mathbf{Z}\mathbf{R}'\mathbf{g}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{mix}(k)) = k\mathbf{Z}\mathbf{R}'\mathbf{g}.$$

- Die Kovarianzmatrix ändert sich nicht.

Der Mixed-Schätzer bei fehlerhafter Vorabinformation

Vergleich des verzerrten Mixed-Schätzers mit dem KQ-Schätzer

$$R(\hat{\beta}_{KQ}) - R(\hat{\beta}_{mix}(k)) \geq 0 \quad (0 < k < k^*).$$

- Der verzerrte Mixed-Schätzer ist also für alle k mit $0 < k < k^*$ bzgl. des Risikos besser als der unrestringierte KQ-Schätzer, wobei k^* wie folgt definiert ist:

$$k^* = (\sigma^{-2} \mathbf{g}' \mathbf{g} - \lambda_p)^{-1}.$$

Dabei ist λ_p der kleinste Eigenwert der Matrix $\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'$.

- Je kleiner $\sigma^{-2} \mathbf{g}' \mathbf{g} - \lambda_p$ desto größer ist die Chance, einen Mixed-Schätzer zu finden, der den KQ-Schätzer dominiert.
- Die Chancen einen Mixed-Schätzer zu finden, der den unrestringierten KQ-Schätzer dominiert, steigen also, wenn der Grad der Fehlerhaftigkeit gering ist und/ oder σ^2 groß ist.

Zusammenhang zwischen $\hat{\beta}_{ridge}$ und $\hat{\beta}_{mix}$

Der verzerrte Mixed-Schätzer

$$\hat{\beta}_{mix}(k) = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{R}'\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y} + k\mathbf{R}'\mathbf{r}).$$

Der Ridge-Schätzer

- Der Ridge-Schätzer ist wie folgt definiert:

$$\hat{\beta}_{ridge} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \tilde{k}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

- Mit $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ stimmen der Ridge-Schätzer und der Mixed-Schätzer überein.
- Der Ridge-Schätzer ist ein spezieller Mixed-Schätzer, der sich ergibt, wenn die Vorabinformation in der Form

$$\mathbf{0} = \beta + \mathbf{g} + \phi, \quad \phi \sim (\mathbf{0}, (\sigma^2/\tilde{k})\mathbf{I})$$

gegeben ist.

Ausblick

Der lineare Minimax-Schätzer

Wenn vorab bekannt ist, dass β in der konvexen Menge

$$B = \{\beta : \beta' \mathbf{T} \beta \leq k\}$$

liegt, eignet sich der lineare Minimax-Schätzer. Dabei ist $k \geq 0$ gegeben und \mathbf{T} eine bekannte, $p \times p$ - Matrix

Literaturverzeichnis

- 1 Durbin, J. (1953): *A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients*, Journal of The American Statistical Association, 48, 799-808.
- 2 Nagar, A.L., Kakwani, N.C. (1964): *The bias and moment matrix of mixed regression estimator*, Econometrica, 32, 174-182.
- 3 R Development Core Team (2008): *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- 4 Theil, H. (1963): *On the use of incomplete prior information in regression analysis*, Journal of The American Statistical Association, 58, 401-414.
- 5 Theil, H. und Goldberger A.S. (1961): *On pure and mixed estimation in economics*, International Economic Review, 2, 65-78.
- 6 Toutenburg, H. (1982): *Prior information in linear models*, Wiley, New York.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch !!!

