

# best linear unbiased estimator - BLUE

Niklas Pfaff

13.11.2008

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Grundlagen
  - Das lineare Modell
  - Kovarianzmatrix der Schätzer
  - Was genau bedeutet BLUE ?
- 3 Gauss-Markov-Theorem
  - Modell
  - Beweisidee
- 4 Fallbeispiel
  - Datensatz
  - Konsequenzen der Annahmeverletzung
- 5 Voraussetzungen für die Gleichheit der Schätzer
  - $X$  und  $V$  regulär
  - Singularität von  $V$

# Einleitung

- ① Grundlagen
- ② Gauss-Markov-Theorem
- ③ Fallbeispiel
- ④ Bedingungen für Gleichheit der Schätzer (KQ und Aitken)
- ⑤ Zusammenfassung
- ⑥ Literatur

# Modellannahmen

- $y = X\beta + e$
- $X$  nicht-stochastische  $n \times p$ -Matrix mit  $p < n$  (i)
- $\rightarrow \text{Rang}(X)=p$  (ii)
- $y$  ist beobachteter Zufallsvektor (iii)
- $E(e) = 0$
- $\text{Cov}(e) = \sigma^2 I_n$
- $\rightarrow e \sim (0, \sigma^2 I_n)$  (iv)

# KQ-Schätzer

- Lineare Regression unter (i) – (iv)
- $f(\beta_*) = \|y - X\beta_*\|^2 \rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$
- $\hat{e} = y - X\hat{\beta}$ ; unverzerrt für  $\sigma^2$  (vgl. z.B.  $\sigma_{ML}^2$ )
- $E(\hat{\beta}) = \beta \quad \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$

## nicht-skalare Kovarianzmatrix

- $\text{Var}(e_i) = \sigma^2$  für  $i = 1, \dots, n$  homoskedastisch
- $\text{Cov}(e_i, e_j) = 0$  für  $i \neq j$  unkorreliert
- $\rightarrow$  Heteroskedastizität und Autokorrelation
- untersuche Effekt von  $\text{Cov}(e) = \sigma^2 V$ ,  $V \neq I_n$
- $\rightarrow$  Modell mit Annahmen (i) – (iii) und (iv\*)
- $\text{Cov}(e) = \sigma^2 V$ ,  $\sigma^2 > 0$ ,  $V$  symmetrische, pd  $n \times n$ -Matrix

# das transformierte Modell

- Annahmen (i) – (iii) und (iv)  $\leftarrow$  nicht !
- $V^{-1/2}y = V^{-1/2}X\beta + V^{-1/2}e$
- $y_* = X_*\beta + e_*$  genügt (i) – (iv)
- $F'F = V^{-1}$
- $e_* \sim (0, \sigma^2 I_n)$

## generalisierter KQ-Schätzer

- $\hat{\beta}_* = (X'_* X_*)^{-1} X'_* y_* = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} y$
- $MSE(\beta, \hat{\beta}_*) = Cov(\hat{\beta}_*) = \sigma^2 (X' V^{-1} X)^{-1}$
- generalisiertes Gauss-Markov-Theorem - unter (i) – (iii) und (iv\*) :  $\hat{\beta}_*$  ist nicht schlechter als irgendein anderer unverzerrter linearer Schätzer
- $\hat{\sigma}_*^2 = \frac{1}{n-p} (y - X \hat{\beta}_*)' (y - X \hat{\beta}_*)$

- $\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ : KQ
- $\text{Cov}(\hat{\beta}^{ATK}) = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}$ : Aitken (VKQ)

- A „best“:  $\text{Cov}(\hat{\beta}^A) \leq \text{Cov}(\hat{\beta}^B)$
- B: beliebiges lineares unverzerrte Schätzverfahren
- $\rightarrow \text{Cov}(\hat{\beta}^B) - \text{Cov}(\hat{\beta}^A)$  psd
- Gauss-Markov-Theorem

- $y = X\beta + e$      $E(e) = 0$      $Cov(e) = \sigma^2 I_n$
- $a'\beta$  schätzbar, so ist der KQ-Schätzer von  $a'\beta$  gleich dem BLUE
- für die Fehler  $e_i$  gilt also:
  - unkorreliert
  - Erwartungswert von Null
  - gleiche Varianz

- $Cov(\hat{\beta}^B) = \sigma^2 CC' \rightarrow$  sämtliche LUE
- $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$
- $Cov(\hat{\beta}^B) - Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 [C - (X'X)^{-1}X'] [C - (X'X)^{-1}X']'$
- $pd \rightarrow$  Gültigkeit

- Anwendung des Aitken-Schätzers
- Voraussetzung:  $\text{Var}(e_t) = \sigma^2$ , also Homoskedastizität
- KQ-Schätzer liefert unverzerrte Punktschätzer
- bei Heteroskedastizität nicht effizient
- modifiziertes Schätzverfahren  $\rightarrow$  Aitken-Methode

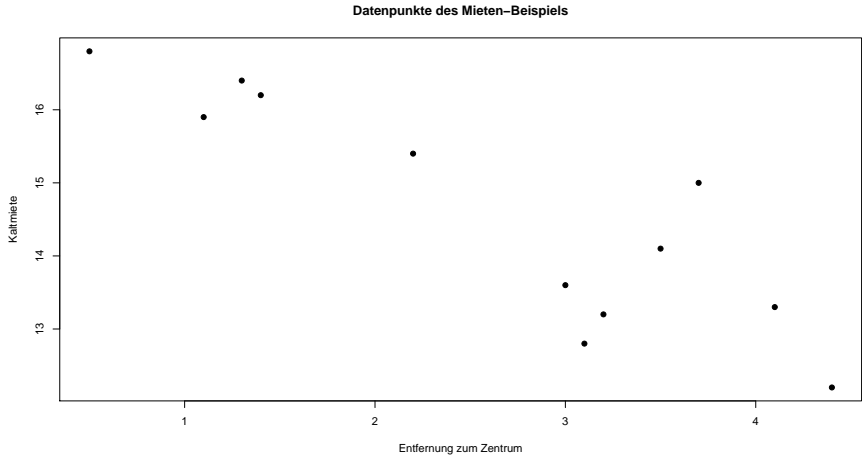
- $V$  hat Diagonalgestalt  $\rightarrow$  Einträge  $\geq 0$
- Transformation durch:  $V^{-1} = V^{-\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{2}}$
- $V^{-\frac{1}{2}} y = V^{-\frac{1}{2}} X \beta + V^{-\frac{1}{2}} e \Leftrightarrow y_* = X_* \beta + e_*$

## Mieter-Beispiel (siehe Ökonometrie (von Auer))

Tabelle: gegebener Datensatz

$t$	$x_t$	$y_t$	$t$	$x_t$	$y_t$
1	0,50	16,80	7	3,10	12,80
2	1,40	16,20	8	4,40	12,20
3	1,10	15,90	9	3,70	15,00
4	2,20	15,40	10	3,00	13,60
5	1,30	16,40	11	3,50	14,10
6	3,20	13,20	12	4,10	13,30

# Grafik



## Beschreibung

- in Stadt: Kaltmiete in Abhängigkeit zu Entfernung zum Stadtzentrum
- zwölf Entfernungen + Kaltmieten
- auffällig: Streuung „wächst“
- Homoskedastizität nicht mehr vertretbar ?!
- Tests auf Homosk.: Goldfeld-Quandt-Test, White-Test, Breusch-Pagan-Test u.a.

- Abbildung:  $\sigma_t^2 \neq \sigma^2$ , aber  $\sigma_t^2 = \sigma^2 x_t$
- $\rightarrow$  Trafo' des linearen Modells
- $\frac{y_t}{\sqrt{x_t}} = \alpha \frac{1}{\sqrt{x_t}} + \beta \frac{x_t}{\sqrt{x_t}} + \frac{e_t}{\sqrt{x_t}}$
- $Var\left(\frac{e_t}{\sqrt{x_t}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x_t}}\right)^2 Var(e_t) = \frac{1}{x_t} \sigma^2 x_t = \sigma^2$
- $E\left(\frac{e_t}{\sqrt{x_t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_t}} E(e_t) = 0$

## neues Modell

- $y_t^* = \frac{y_t}{\sqrt{x_t}}, z_t^* = \frac{1}{\sqrt{x_t}}, x_t^* = \frac{x_t}{\sqrt{x_t}}, e_t^* = \frac{e_t}{\sqrt{x_t}}$
- $y_t^* = \alpha z_t^* + \beta x_t^* + e_t^*$

**Tabelle:** Ergebnisse der Schätzer

Modell	Variable	Koeff.	$\hat{se}(\hat{\cdot})$
Aitken	transf. Konstante	17.391	0,294
Aitken	transf. Entfernung	-1,073	0,137
KQ	Konstante	17,393	0,527
KQ	Entfernung	-1,074	0,182

# Die Kovarianzmatrix

- $$\text{Cov}(e) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 V$$

- gilt  $\sigma_t^2 = \sigma^2 x_t$  vor, so lautet

- $$V = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_T \end{pmatrix}$$

## autokorrelierte Fehler

- Korrelation zw.  $e_i$  und  $e_j$  wird kleiner, wenn Distanz zw.  $i$  und  $j$  wächst.
- $AR(1)$ -Prozess:  $e_i = \rho e_{i-1} + u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$
- $$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
- $V$  invertierbar und generalisierte KQ-Schätzer:  
$$\hat{\beta}_* = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$
- $$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=2}^n \hat{e}_{i-1}\hat{e}_i}{\sum_{i=2}^n \hat{e}_{i-1}^2}$$
- $u_i \sim (0, \sigma_u^2)$  für alle möglichen  $i$  und  $Cov(u_i, u_j) = 0$ ,  $i \neq j$

## T.W. Anderson (1948)

- wenn die  $q$  Spalten der  $n \times q$ -Matrix  $X$  Linearkombinationen der Eigenvektoren von  $V$  sind  $\Leftrightarrow$  Aitken = KQ
- ohne diese Kondition  $\rightarrow \beta$  und Varianz schätzbar (KQ und Aitken)
- Bsp:  $\rightarrow$  Tafel

## Zyskind (1967)

- acht notwendige und hinreichende Konditionen (A1-A8) für Gleichheit  $\rightarrow$  ohne Rangannahmen!
- A5: einfache Bedingung zum Überprüfen in der Praxis
- $\rightarrow$  Zyskinds Kondition:  $HV = VH$
- Bsp:  $q = 1$  und  $X = 1_n$

## Zyskind (1967)

- Wir haben gezeigt, dass wenn die Kovarianzmatrix  $V$  die Struktur

$$V = aI_n + b1_n1_n'$$

hat, der KQ-Schätzer gleich dem Aitken-Schätzer ist, genau dann, wenn die Designmatrix  $X$  den Bedingungen

$$X'1_n = 0_n \text{ oder } Xf = 1_n$$

für einen beliebigen  $q \times 1$ -Vektor  $f$ , genügt.

## Schätzer bei Singularität

- unter Annahmen (i) – (iii) und singulärer Kovarianzmatrix  $\text{Cov}(e) = \sigma^2 V$ , generalisierte KQ-Schätzer  $\hat{\beta}_* = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$  existiert nicht
- aber  $\hat{\beta}$  mit  $\text{Cov}(\hat{\beta}) \leq_L \text{Cov}(Ay + a)$ , für jeden linearen Schätzer  $Ay + a$  mit  $E(Ay + a) = \beta$
- $\hat{\beta} = (X'T^+X)^{-1}X'T^+y$ ,  $T = V + kXX'$ , mit  $k \begin{cases} > 0, & \text{wenn } C(X) \not\subseteq C(V) \\ \geq 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $\rightarrow$  generalisiertes GM-Theorem

- $C(VX) \subseteq C(X)$
- $V$  regulär  $\rightarrow rk(VX) = rk(X)$
- $V$  singular,  $C(VX) \subseteq C(X)$  nicht notwendig äquivalent zu  $C(VX) = C(X)$
- $V$  unbekannt  $\rightarrow$  Überprüfung der Kondition unmöglich

## Watson (1955)

- Güte:  $\Phi = \det(\text{Cov}(\beta^*)) / \det(\text{Cov}(\hat{\beta}))$
- $= [\det(X'X)]^2 / [\det(X'VX)\det(X'V^{-1}X)]$
- $0 < \Phi \leq 1 \rightarrow \Phi = 1 \Leftrightarrow \text{KQ} = \text{Aitken}$
- weitere Spezialfälle: The Equality of the OLSE and the BLUE;  
Puntanen, Styan (1998)

- im linearen Modell: Gauss-Markov-Theorem
- $\text{Cov}(e) = \sigma^2 V \rightarrow$  verallgemeinerter KQ-Schätzer
- Kovarianzmatrix nicht invertierbar  $\rightarrow \hat{\beta} = (X' T^+ X)^{-1} X' T^+ y$
- Gleichheit der Schätzer:  $C(VX) \subseteq C(X)$

## Auswahl

- von Auer (2005), *Ökonometrie*, 3. Auflage, Springer, S. 187-184 u. 357-382
- Anderson (1948), *On the Theory of Testing Serial Correlation*, Skandinavisk Aktuarietidskrift
- Zyskind (1967), *On Canonical Forms, Non-negative Covariance Matrices and Best and Simple Least Squares Linear Estimators in Linear Models*, The Annals of Mathematical Statistics
- Jürgen Gross (2007), *Linear Regression*, Springer, 1. Auflage
- S.Puntanen, G.P.H. Styan (1989), *The Equality of the Ordinary Least Squares Estimator and the Best Linear Unbiased Estimator*, The American Statistician, Vol. 43, No. 3