

## Übungen zur Vorlesung Statistik VI

### Blatt 8

#### Aufgabe 22

Seien  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v. Zufallsvariablen mit  $P^{X_1} \in \{N(\mu, \sigma_0^2) : \mu \in \mathbb{R}\}$ ,  $\sigma_0^2 > 0$  fest. Zeigen Sie, dass der Test

$$\psi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \left| \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \right| > u_{\alpha/2} \\ 0, & \text{falls } \left| \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0} \right| \leq u_{\alpha/2} \end{cases}$$

der gleichmäßig beste unverfälschte Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  ist.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass eine standard-normalverteilte Zufallsvariable  $U$  mit

$$\sum X_i = \sqrt{n\sigma_0^2}U + n\mu$$

existiert und dass für einen Test  $\psi(X_1, \dots, X_n) = I_{(c, \infty)}(U)$  gilt:

$$E_\rho \left( \psi(X_1, \dots, X_n) \sum X_i \right) = \sqrt{n\sigma_0^2} E_\rho (I_{(c, \infty)}(U)U) + n\mu E_\rho (I_{(c, \infty)}(U)).$$

#### Aufgabe 23

Die Verteilungsklasse  $\mathcal{P} = \{P_\varrho : \varrho \in \Xi\}$  sei eine einparametrische Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter  $\varrho$  und Statistik  $T$ . Sei  $\varrho_0 \in \overset{\circ}{\Xi}$ . Wir bezeichnen mit  $\psi_{\geq, \alpha/2}$  den gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau  $\frac{\alpha}{2}$  für  $H_0^\geq : \varrho \geq \varrho_0$  gegen  $H_1^\leq : \varrho < \varrho_0$  und entsprechend mit  $\psi_{\leq, \alpha/2}$  den gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau  $\frac{\alpha}{2}$  für  $H_0^\leq : \varrho \leq \varrho_0$  gegen  $H_1^\geq : \varrho > \varrho_0$ .

a) Zeigen Sie, dass der Test  $\tilde{\psi}$  definiert durch

$$\tilde{\psi}(x) := \max\{\psi_{\geq, \alpha/2}, \psi_{\leq, \alpha/2}\}$$

ein Test zum Niveau  $\alpha$  für  $H_0^\neq : \varrho = \varrho_0$  gegen  $H_1^\neq : \varrho \neq \varrho_0$  ist.

b) Bestimmen Sie für die Situation in Beispiel 12.24 den Test  $\tilde{\psi}$  und vergleichen Sie ihn mit dem dort berechneten gleichmäßig besten unverfälschten Test  $\psi^*$  zum Niveau  $\alpha = 0.05$  für  $H_0^\neq : \mu = 1$  gegen  $H_1^\neq : \mu \neq 1$  für  $n = 10$ . Handelt es sich bei  $\tilde{\psi}$  um einen unverfälschten Test für dieses Hypothesenpaar? Ist  $\psi^*$  gleichmäßig besser als  $\tilde{\psi}$ ? Zeichnen Sie dafür die Güte der beiden Tests.

|   |
|---|
| <b>Abgabe bis Mittwoch, den 03.06.2015, 10.00 Uhr</b> |
|---|