TU DORTMUND
Fakultät Statistik
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. J. Wiedom
M. Sc. C. Neumann

Sommersemester 2015
20. Mai 2015

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 7

Aufgabe 19

Seien $X_1, \ldots, X_9$ unabhängig identisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma_0^2 = 1$.

a) Sie wollen die Hypothese $H_0 : \mu \notin (-1, 1)$ gegen $H_1 : \mu \in (-1, 1)$ testen.
Bestimmen Sie einen glm. besten auf dem Rand ähnlichen Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ für H_0 gegen H_1.

b) Im Gegensatz zur Situation im Teil a) wollen Sie jetzt nachweisen, dass $\mu \notin [-1, 1]$ ist. Formulieren Sie geeignete Hypothesen $\tilde{H}_0$ und $\tilde{H}_1$ und bestimmen Sie einen glm. besten auf dem Rand ähnlichen Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ für $\tilde{H}_0$ gegen $\tilde{H}_1$.

Hinweis Zur Bestimmung der kritischen Werte ist die Funktion `multiroot` aus dem Paket `rootSolve` nützlich.

Aufgabe 20

Ein Tulpenzüchter bringt eine neue Sorte auf den Markt und behauptet, dass diese eine Blühzeit von 80 Tagen hat. Ein Großhändler, der an der Qualität interessiert ist, bezweifelt diese Behauptung. Er kauft deshalb 20 Zwiebeln der neuen Sorte und misst später die Blühzeit der Tulpen in Tagen:

$$x_1 = 75, \quad x_2 = 76, \quad x_3 = 75, \quad x_4 = 78, \quad x_5 = 83, \quad x_6 = 82, \quad x_7 = 80,$$
$$x_8 = 81, \quad x_9 = 81, \quad x_{10} = 79, \quad x_{11} = 74, \quad x_{12} = 73, \quad x_{13} = 79, \quad x_{14} = 72,$$
$$x_{15} = 79, \quad x_{16} = 78, \quad x_{17} = 79, \quad x_{18} = 80, \quad x_{19} = 81, \quad x_{20} = 80$$

Kann er zum Niveau $\alpha = 0.01$ nachweisen, dass die durchschnittliche Blühzeit dieser Tulpensorte nicht im Intervall $[78, 82]$ liegt?
Es sei dabei angenommen, dass die Blühdauer von Tulpen exponentialverteilt ist mit unbekanntem Erwartungswert $1/\lambda > 0$. Führen Sie den entsprechenden optimalen Test durch.

Aufgabe 21

Die Anzahl Y der Zerfälle pro Stunde in 1 Gramm einer radioaktiven Substanz ist poissonverteilt mit Parameter λ, $P^Y = Poi(\lambda)$, wobei λ von der Zusammensetzung der Substanz abhängt. Eine Probe von 1000 Gramm

Gewicht enthalte einen Anteil von a Gramm radioaktiver Abfälle mit $\lambda_1 = 10$ und $1000 - a$ Gramm Abfälle mit geringerer Aktivität, bei denen $\lambda_2 = 0.01$. Wir beobachten bei diesem Gemisch bei 10 Messungen von jeweils einer Stunde

$$x_1 = 53, \quad x_2 = 75, \quad x_3 = 58, \quad x_4 = 55, \quad x_5 = 71,$$
$$x_6 = 75, \quad x_7 = 61, \quad x_8 = 60, \quad x_9 = 48, \quad x_{10} = 49$$

Zerfälle.

a) Seien $Y_1, ..., Y_a, Y_{a+1}, ..., Y_m$ stochastisch unabhängige Zufallsvariable, wobei $Y_1, ..., Y_a$ nach $Poi(\lambda_1)$ und $Y_{a+1}, ..., Y_m$ nach $Poi(\lambda_2)$ verteilt sind. Zeigen Sie, dass dann die Zufallsvariable $X = Y_1 + ... + Y_a + Y_{a+1} + ... + Y_m$ nach $Poi(a\lambda_1 + (m-a)\lambda_2)$ verteilt ist.

Hinweis: Die Fourier-Transformierte $\widehat{Poi(\lambda)}$ der Poisson-Verteilung erfüllt

$$\widehat{Poi(\lambda)}(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

b) Sie wollen nachweisen, dass entweder weniger als 1% oder mehr als 2% der Probe zur stärker radioaktiven Substanz gehören. Formulieren Sie ein geeignetes Testproblem und bestimmen Sie einen gleichmäßig besten unverfälschten Test zum Niveau α.

Können Sie Ihre Vermutung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% belegen?

Abgabe bis Mittwoch, den 27.05.2015, 10.00 Uhr