TU DORTMUND Sommersemester 2015
Fakultät Statistik 06. Mai 2015
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. J. Wiedom
M. Sc. C. Neumann

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 5

Aufgabe 13

Ein Hersteller möchte garantieren, dass seine Glühbirnen mit 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 1000 Stunden brennen. Ein Kunde möchte überprüfen, ob diese Behauptung gerechtfertigt ist. Er möchte also gegebenenfalls nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit vorher auszufallen signifikant höher ist. Dazu notiert er die Lebensdauer $X_i, i = 1, \ldots, 10$ von 10 solchen Birnen, die (im Dauerbetrieb) in seiner Anlage arbeiten.
Nehmen Sie an, dass $X_1, \ldots, X_{10}$ unabhängig identisch exponentialverteilt sind mit unbekanntem Parameter λ.

a) Formulieren Sie die Fragestellung des Kunden als Testproblem mit einer geeigneten Hypothese für λ.

b) Zeigen Sie, dass die Vorausetzungen von 12.6 gegeben sind. Wie sehen Θ_0, Θ_1 und Θ_r aus? Konstruieren Sie den Test für $\alpha = 0.05$.

c) Zeichnen Sie die Güte für diesen Test in einem geeigneten Bereich von λ.

d) Nach 3 Monaten sind bereits alle 10 Lampen ausgefallen. Ihre beobachteten Einsatzzeiten bis zum Ausfall sind (in h): 557, 740, 1053, 942, 1500, 800, 750, 1023, 994, 2000. Können Sie dem Hersteller nachweisen, mangelhafte Ware geliefert zu haben?

Aufgabe 14

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P^{X_1} \in \{N(\mu, \mu) : \mu > 0\}$, d.h. $\mathcal{P}$ ist die Verteilungsklasse der Normalverteilungen mit Erwartungswert $\mu > 0$ und Varianz $\mu > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Familie der gemeinsamen Verteilungen von $X_1, \ldots, X_n$ eine einparametrige Exponentialfamilie mit Statistik T, wobei

$$T(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \text{ ist.}$$

Der natürliche Parameter ρ berechnet sich aus μ zu $\rho = -1/(2\mu)$.

b) Sei nun $n = 7$. Bestimmen Sie einen Test φ zum Niveau $\alpha = 0.05$ mit möglichst großer Güte für die Hypothese $H_0 : \mu \leq 10$ gegen $H_1 : \mu > 10$. Können Sie die Hypothese verwerfen, wenn Sie die

Realisierungen $x_1 = 30.8$, $x_2 = 10.1$, $x_3 = 15.4$, $x_4 = -0.92$, $x_5 = 35.6$, $x_6 = 4.1$, $x_7 = 16.6$ beobachten?

Hinweis: Wenn $X_1, \ldots, X_7$ unabhängig und identisch nach $N(10, 10)$ verteilt sind, so gilt (ohne Beweis):

$$P(X_1^2 + \cdots + X_7^2 \leq 1067) = 0.95.$$

Aufgabe 15

Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P^{X_1} = \{N(\mu, \sigma_0) : \mu \in I\!R, \sigma_0^2 \in I\!R_+ \text{ fest}\}$.

a) Wir untersuchen den Test $\psi_{\leq}$ mit $\psi_{\leq}(x_1, ..., x_n) = I_{(k_\alpha, \infty)}\left(\sum x_i\right)$. Sei $\rho = \frac{\mu}{\sigma_0^2}$ der natürliche Parameter. Man zeige, dass die Ableitung nach ρ der Gütefunktion $\beta_{\psi_{\leq}}$ an jeder Stelle $\rho \in \Xi$ positiv ist.

b) Wie sieht es mit der Ableitung der Gütefunktion $\beta_{\psi_{\geq}}$ des Tests $\psi_{\geq}$ mit $\psi_{\geq}(x_1, ..., x_n) = I_{(-\infty, \ell_\alpha)}(\sum x_i)$ aus?

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma_0^2}} \sim N(0, 1).$$

Daher gibt es eine standard-normalverteilte Zufallsvariable U mit

$$\sum X_i = \sqrt{n\sigma_0^2} U + n\mu$$

und es gilt $\psi_{\leq}(X_1, ..., X_n) = I_{(c,\infty)}(U)$. Dabei ist $c = u_\alpha$. Somit gilt also, dass

$$E_\rho\left(\psi_{\leq}(X_1, ..., X_n) \sum X_i\right) = \sqrt{n\sigma_0^2} E_\rho\left(I_{(c,\infty)}(U)U\right) + n\mu E_\rho(I_{(c,\infty)}(U)).$$

Zur Berechnung von $E_\rho\left(I_{(c,\infty)}(U)U\right)$ hilft, dass

$$\int_b^a u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\exp(-\frac{1}{2}b^2) - \exp(-\frac{1}{2}a^2)\right).$$

Abgabe bis Mittwoch, den 13.05.2015, 10.00 Uhr