

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 3Aufgabe 7

Die Zufallsvariablen: X_1, \dots, X_n seien u.i.v. Dabei sei \mathcal{P}^{X_1} Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\varrho \in \Xi \subset \mathbb{R}^l$ und Statistik $T : (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$.

Zeigen Sie, dass dann die Familie $\mathcal{P}^{X_1, \dots, X_n}$ der gemeinsamen Verteilungen auch Exponentialfamilie ist mit dem gleichen natürlichen Parameter $\rho \in \Xi$ und Statistik: $\tilde{T} : (\mathcal{X}^n, \mathcal{D}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$, wobei $\tilde{T}(x_1, \dots, x_n) = T(x_1) + \dots + T(x_n)$. Dabei ist $\mathcal{D}^n = \mathcal{D} \otimes \dots \otimes \mathcal{D}$ die Produkt- σ -Algebra.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien Exponentialfamilien sind und geben Sie jeweils den natürlichen Parameter ϱ und die Statistik T an.

- Die Poissonverteilung $Poi(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.
- Die Erlangverteilung $Erl(n, \lambda_0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_0 > 0$ fest.
- Die Erlangverteilung $Erl(n_0, \lambda)$ mit $n_0 \in \mathbb{N}$ fest und $\lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9

Sei d der Abstand bezüglich der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz zwischen zwei Verteilungen. Zeigen Sie, dass

$$d(B(n, \pi_1), B(n, \pi_2)) = P\left(Y \leq \frac{n}{2}\right) - P\left(X \leq \frac{n}{2}\right),$$

wobei $\pi_1 \geq 1/2$, $\pi_2 = 1 - \pi_1$ und $n \in \mathbb{N}$ gerade sowie $P^X = B(n, \pi_1)$ und $P^Y = B(n, \pi_2)$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie den Abstand d bezüglich der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz zwischen folgenden Verteilungen:

- a) Die Normalverteilungen $N(\mu_1, 1)$ und $N(\mu_2, 1)$ mit $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$
- b) Die Exponentialverteilungen $Exp(\lambda_1)$ und $Exp(\lambda_2)$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$

| |
|---|
| Abgabe bis Mittwoch, den 29.04.2015, 10.00 Uhr |
|---|