TU DORTMUND Sommersemester 2015
Fakultät Statistik 23. Juni 2015
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. J. Wiedom
M. Sc. C. Neumann

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 12

Aufgabe 32

Die beiden Cola-Hersteller C und P wollen endgültig klären, ob ein Produkt von den Verbrauchern bevorzugt wird. Sie führen dazu mit insgesamt n Personen einen Geschmackstest durch. Bei diesem Geschmackstest gibt es insgesamt drei verschiedene Antwortmöglichkeiten, welche für die i-te Versuchsperson wie folgt kodiert werden:

$$X_i = \begin{cases} 0, & & \text{weder } C \text{ noch } P \\ 1, & \text{Person } i \text{ bevorzugt} & C \\ 2, & & P \end{cases}$$

Seien $N_j = \sum_{i=1}^{n} I_{\{j\}}(X_i)$ mit $j \in \{0,1,2\}$ die entsprechenden Anzahlen von Personen, welche C, P bzw. keines von beidem bevorzugen. Die zugehörigen unbekannten Antwortanteile in der Grundgesamtheit seien $\pi_0,\ \pi_1$ und π_2, wobei $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ gilt.

Wir betrachten das Testproblem

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi_1 \neq \pi_2.$$

a) Formulieren Sie einen geeigneten statistischen Raum. Zeigen Sie, dass die Familie der Verteilungen von $(N_1, N_2, N_3)'$ eine reguläre $(1+1)$-parametrische Exponentialfamilie mit natürlichem Parameter $\varrho = (\zeta, \delta)' = (\log(\pi_2/(1-\pi_1-\pi_2)), \log(\pi_1/\pi_2))'$ und zugehöriger Statistik $T = (S,U)' = (N_1 + N_2, N_1)'$ ist.

b) Formulieren Sie das Testproblem in diesen Parametern.

c) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von U gegeben $S = s$.

Hinweis: Die Randdichten der Multinomialverteilung sind Dichten der Binomialverteilung.

Aufgabe 33

Seien $Y_1, \ldots, Y_n \sim Poi(\tau)$ und $Z_1, \ldots, Z_m \sim Poi(\nu)$ stochastisch unabhängige und poissonverteilte Zufallsvariablen. Dabei seien $\tau \in I\!R_+$ und $\nu \in I\!R_+$ unbekannt.

a) Zeigen Sie, dass die Familie der Verteilungen von $X = [Y_1, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_m]'$ eine reguläre $(1+1)$-parametrische Exponentialfamilie ist mit natürlichem Parameter $\varrho = (\zeta, \delta)'$, wobei $\zeta = \ln(\nu)$ und $\delta = \ln\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$. Die zugehörigen Statistiken sind $S = \sum Y_i + \sum Z_j$ und $U = \sum Y_i$.

b) Bestimmen Sie für beliebiges $[\zeta, \delta]' \in \Xi$ und beliebiges $s \in I\!N_0$ die bedingte Verteilung von U unter $S = s$.
Hinweis: Berechnen Sie die bedingte Dichte.

c) Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von b) bei festem δ unabhängig von ζ ist.

Abgabe bis Mittwoch, den 01.07.2015, 10.00 Uhr