TU DORTMUND Sommersemester 2015
Fakultät Statistik 09. Juni 2015
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. J. Wiedom
M. Sc. C. Neumann

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 10

Aufgabe 26

Seien U, S st.u. Zufallsvariablen mit $P^U = P^S = Exp(\mu)$, die Exponentialverteilung mit Parameter μ. Sei $T : I\!R^2 \to I\!R$ def. durch $T(u, s) = u + s$. Bestimmen Sie $E(U|T)$.

Hinweis: Die gemeinsame Verteilung $P^{T,U,S}$ hat keine stetige Dichte. Verwenden Sie den Transformationssatz für Dichten, um zu zeigen, dass die gemeinsame Verteilung $P^{T,U}$ eine Lebesque-Dichte p mit
$p(t, u) = \mu^2 \exp(-\mu t) I_{(0,\infty)}(t) I_{(0,t)}(u)$ hat.

Aufgabe 27

Seien U, S st.u. Zufallsvariablen mit $P^U = P^S = Poi(\mu)$, die Poisson-Verteilung mit Parameter μ. Sei $T : I\!R^2 \to I\!R$ def. durch $T(u, s) = u + s$. Bestimmen Sie $E(U|T)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilung $P^{T,U}$ diskrete Dichte p hat, wobei
$p(t, u) = \frac{\mu^t}{u!(t-u)!} \exp(-2\mu) I_{I\!N_0}(t) I_{\{0,1,\ldots,t\}}(u)$.

Aufgabe 28

Sei $T :\ (\mathcal{X}, \mathfrak{D}) \mapsto (\Delta, \mathfrak{C})$ suffizient für $\mathcal{P}^X = \{P^X_\theta : \theta \in \Theta\}$.
Sei $\Psi := \{\psi :\ (\mathcal{X}, \mathfrak{D}) \mapsto ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})\}$ die Menge aller Tests und
sei $\Gamma := \{\gamma :\ (\Delta, \mathfrak{C}) \mapsto ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})\}$ die Menge aller Tests, welche von den Beobachtungen x nur über $T(x)$ abhängen.

Man zeige:

a) $\forall\ \gamma \in \Gamma$ ist $\gamma \circ T \in \Psi$

b) $\forall\ \psi \in \Psi\ \exists\ \gamma \in \Gamma$, sodass $\forall\ \theta \in \Theta : \beta_\psi(\theta) = \beta_{\gamma\circ T}(\theta)$

Hinweis zu b): Nutzen Sie die bedingte Erwartung $E_\theta(\psi(X)|T)$ und zeigen Sie, dass es ein $\gamma \in \Gamma$ gibt, mit $\forall\ \theta \in \Theta$: $\gamma(t) = E_\theta(\psi(X)|T = t)$ für P^T–fast alle t.

Abgabe bis Mittwoch, den 17.06.2015, 10.00 Uhr