

## Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 1Aufgabe 1

Seien  $(X_i : n \in \mathbb{N})$  u.i.v. so, dass  $EX_i^4$  existiert. Sei  $\mu = EX_1$  und  $\sigma^2 = \text{Var}X_1$ .

Definiere  $\bar{X}_{(n)} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und, für  $n \geq 2$ ,  $S_{(n)}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_{(n)})^2$ .

Zeigen Sie, dass  $S_{(n)}^2 \xrightarrow{\text{stoch.}} \sigma^2$ .

*Hinweis:* Zerlegen Sie  $S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{X}_{(n)})^2$  und verwenden Sie, dass  $\bar{X}_{(n)} \xrightarrow{\text{stoch.}} \mu$ .

Aufgabe 2

Seien  $(X_i : n \in \mathbb{N})$  u.i.v. mit bekanntem Erwartungswert  $\mu$  und unbekannter Varianz, sodass  $EX_1^4$  existiert.

Zeigen Sie, dass für

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}S_{(n)}},$$

mit  $S_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  gilt:  $P^{Z_n} \xrightarrow{w} \mathbb{N}(0, 1)$ .

Aufgabe 3

Sei  $X_n \sim \mathbb{P}_{n\mu}$  für festes  $\mu \geq 0$ . Zeigen Sie, dass für  $Z_n := \frac{X_n}{\sqrt{n\mu}} - \sqrt{n\mu}$  gilt:  $P^{Z_n} \xrightarrow{w} \mathbb{N}(0, 1)$ .

*Hinweis:* Stellen Sie  $X_n$  in der Form  $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$  dar, wobei  $(Y_n : n \in \mathbb{N})$  u.i.v. mit  $P^{Y_1} = \mathbb{P}_\mu$  seien.

<b>Abgabe bis Mittwoch, den 15.04.2015, 10.00 Uhr</b>
---