TU DORTMUND Wintersemester 2016/17
Fakultät Statistik 13. Dezember 2016
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
Statistik V

Blatt 9

Aufgabe 26

a) Betrachte die σ-Algebren $\mathcal{A} = \{\emptyset, (-\infty, 1], (1, \infty), \mathbb{R}\}$ auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, [0, \frac{1}{4}], (\frac{1}{4}, 1), [0,1]\}$ auf $[0,1]$ sowie die Abbildung $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.
Ist G $(\mathcal{A},\mathcal{T})$-messbar?

b) Sei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $U(x) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} nI_{[n,n+1)}(x)$. Ist $U \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra ist?

Aufgabe 27

Sei $(T_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass $\limsup T_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.
Hinweis: Zeigen Sie für beliebiges $q \in \mathbb{Q}$, dass $\{\limsup T_n \leq q\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{T_n \leq q + \frac{1}{k}\}$.

Aufgabe 28

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $U \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $T_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$T_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq U < \frac{k}{2^n}\right\}} + nI_{\{U \geq n\}}.$$

a) Zeigen Sie, dass T_n messbare Treppenfunktion ist, d.h. $T_n \in \mathcal{T}_+(\Omega, \mathcal{A})$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jedes feste $\omega \in \Omega$ gilt: $T_n(\omega) \leq T_{n+1}(\omega)$.

c) Zeigen Sie für jedes $\omega \in \Omega$ mit $U(\omega) < \infty$: für jedes $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0$: $|U(\omega) - T_n(\omega)| \leq \epsilon$.

d) Zeigen sie für jedes $\omega \in \Omega$ mit $U(\omega) = \infty$: für jedes $N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0$: $T_n(\omega) > N$.

Abgabe bis Dienstag, den 20.12.2016, 8.30 Uhr in der Vorlesung.