

## Übungen zur Vorlesung STATISTIK V

### Blatt 8

#### Aufgabe 23

Sei  $\xi$  ein  $\cap$ -stabiles Mengensystem über  $\Omega$  und  $\mathcal{T} = \sigma(\xi)$ . Seien  $P_1$  und  $P_2$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathcal{T}$ , für die gilt:  $\forall E \in \xi : P_1(E) = P_2(E)$ . Zeigen Sie, dass  $P_1 = P_2$ .

*Hinweis:* Untersuchen Sie  $\tilde{\xi} = \xi \cup \{\Omega\}$ .

#### Aufgabe 24

Sei  $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  eine Abbildung. Für alle  $B \subset \Omega_2$  definiere  $T^{-1}(B) = \{\omega_1 \in \Omega_1 : T(\omega_1) \in B\}$ .

Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $B_i \subset \Omega_2$  für alle  $i \in I$ . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a)  $T^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} T^{-1}(B_i)$ .

b)  $T^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} T^{-1}(B_i)$ .

c)  $T^{-1}(B_i^C) = (T^{-1}(B_i))^C$ .

d) Falls  $T^{-1}(B_i) = \emptyset$  für ein  $i \in I$  gilt, so folgt  $B_i = \emptyset$ .

#### Aufgabe 25

Sei  $T : \Omega \rightarrow \Gamma$  eine Abbildung.

a) Sei  $\mathcal{T}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Gamma$ . Zeigen Sie, dass

$$T^{-1}(\mathcal{T}) = \{A \subset \Omega : \exists S \in \mathcal{T} \text{ mit } A = T^{-1}(S)\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  ist.

b) Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ . Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{Q} = \{G \subset \Gamma : T^{-1}(G) \in \mathcal{A}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Gamma$  ist.

c) Sei  $\xi \subset 2^\Gamma$  ein beliebiges Mengensystem. Man zeige, dass

$$\sigma(T^{-1}(\xi)) = T^{-1}(\sigma(\xi)).$$

<b>Abgabe bis Dienstag, den 13.12.2016, 8.30 Uhr in der Vorlesung.</b>
--