

Übungen zur Vorlesung
STATISTIK V**Blatt 7****Aufgabe 19**

Betrachten Sie den Semiring $\mathfrak{K} = \{\emptyset, (0, 1], (1, 2], (2, 3], (0, 3]\} \subset 2^{\mathbb{R}}$ und den Inhalt ν auf \mathfrak{K} mit $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu((0, 1]) = \nu((1, 2]) = \nu((2, 3]) = 1$ und $\nu((0, 3]) = 3$.

- Bestimmen Sie den von \mathfrak{K} erzeugten Ring $\rho(\mathfrak{K})$.
- Zeigen Sie, dass die Fortsetzung von ν auf $\rho(\mathfrak{K})$ sogar Prämaß ist.
- Bestimmen Sie das äußere Maß ν^* zu ν .

Hinweis zu b): Beachten Sie, dass jede Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von Mengen aus $\rho(\mathfrak{K})$ die Vereinigung von höchstens 7 unterschiedlichen Mengen ist.

Aufgabe 20

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine verallgemeinerte Verteilungsfunktion und μ_F das Prämaß auf $\rho(\mathcal{H}_I)$. Sei $B \subset \mathbb{R}$ beschränkt, sonst aber beliebig.

Zeigen Sie: Für das äußere Maß $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ von μ_F gilt: $\mu^*(B) < \infty$.

Aufgabe 21

Sei \mathfrak{L} ein beliebiges Mengensystem über Ω und $\rho(\mathfrak{L})$ der von \mathfrak{L} erzeugte Ring. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathfrak{L}) = \sigma(\rho(\mathfrak{L}))$ ist.

Aufgabe 22

Sei μ^* äußeres Maß auf 2^Ω und $\mathfrak{H} = \{A \subset \Omega : A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$. Wegen Behauptung 2.44 ist \mathfrak{H} eine σ -Algebra.

Zeigen Sie, dass $\nu := \mu^*|_{\mathfrak{H}}$ ein Maß auf (Ω, \mathfrak{H}) ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Bemerkung 2.42, dass ν Inhalt auf (Ω, \mathfrak{H}) ist. Nutzen Sie Behauptung 1.25 und (am 4) zum Nachweis, dass ν σ -additiv ist.

Abgabe bis Dienstag, den 06.12.2016, 8.30 Uhr in der Vorlesung.
--