TU DORTMUND Wintersemester 2016/17

Fakultät Statistik 15. November 2016

Prof. Dr. J. Kunert

M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
Statistik V

Blatt 5

Aufgabe 11

Seien $\tilde{\mathcal{F}} := \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{R}\}$ und $\tilde{\mathcal{R}} := \{[r, \infty) : r \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie, dass gilt: $\sigma(\tilde{\mathcal{F}}) = \sigma(\tilde{\mathcal{R}}) = \mathfrak{B}$.

Aufgabe 12

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ Messraum, wobei $\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \subset \mathfrak{A}$. Seien μ_1 und μ_2 diskrete Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Dichten p_1 bzw. p_2 und Trägern T_1 bzw. T_2.

a) Beweisen Sie: $\mu_1 = \mu_2$ gilt genau dann, wenn

   (i) $p_1(\omega) = p_2(\omega)$ für alle $\omega \in T_1 \cap T_2$

   (ii) $p_1(\omega) = 0$ für alle $\omega \in T_1 \cap T_2^c$ und

   (iii) $p_2(\omega) = 0$ für alle $\omega \in T_2 \cap T_1^c$

b) Gilt die Aussage auch, wenn $\{\{\omega\} | \omega \in \Omega\} \subset \mathfrak{A}$ nicht gefordert ist?

Aufgabe 13

Sei $\Omega = I\!R$ und $\mathcal{A} = \{A \subset I\!R | A$ beschränkt oder A^c beschränkt $\}$.

a) Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra? Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass die Borel'sche σ-Algebra $\mathfrak{B}$ in $\sigma(\mathcal{A})$ enthalten ist, d.h. $\mathfrak{B} \subset \sigma(\mathcal{A})$.

Hinweis: Eine beliebige Menge $B \subset I\!R$ heißt beschränkt, wenn es $r \in I\!R$ gibt mit $B \subset [-r, r]$.

Aufgabe 14

Die Zahlen 10, 1.1 und 0.1 lassen sich mit 2 Ziffern darstellen. Sei A_n die Menge aller Zahlen, die sich mit n Ziffern darstellen lassen, $n \in I\!N$. Sei $\mathcal{E} = \{A_n : n \in I\!N\} \subset 2^{I\!R}$.

a) Zeigen Sie , dass $\bigcup_{n \in I\!N} A_n \subsetneq I\!R$.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{B}$ die Borelsche σ-Algebra ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B} \not\subset \sigma(\mathcal{E})$.

Hinweis: Beachten Sie, dass jedes A_n aus höchstens $n10^n$ Elementen besteht.

Abgabe bis Dienstag, den 22.11.2016, 8.30 Uhr in der Vorlesung.