TU DORTMUND

Fakultät Statistik

Prof. Dr. J. Kunert

M. Sc. Ch. Neumann

Wintersemester 2016/17

7. Februar 2017

Übungen zur Vorlesung

Statistik V

Blatt 15

Aufgabe 47

Sei Y eine nach $Poi(\lambda)$ verteilte Zufallsvariable, d.h. $P^Y = Poi(\lambda)$.

a) $\widehat{Poi(\lambda)} = \widehat{P^Y}(t) = \varphi_Y(t) \int \exp(ity)dP(y) = \sum\limits_{y=0}^{\infty} \exp(ity)\lambda^y \frac{1}{y!} \exp(-\lambda)$ wegen Beh. 4.22 $= \exp(-\lambda) \sum\limits_{y=0}^{\infty} \left((\exp(it)\lambda)^y \frac{1}{y!}\right) = \exp(-\lambda)\exp(\exp(it)\lambda) = \exp((\exp(it)-1)\lambda)$.

b) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y(t) = i\lambda \exp(it)\exp((\exp(it)-1)\lambda) \Rightarrow$ wg. 7.19 $EY = (-i)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y(t)\Big|_{t=0} =$
$(-i)i\lambda \exp(0)\exp(0) = \lambda$.

$\frac{\partial^2}{(\partial t)^2}\varphi_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t}(i\lambda \exp(it)\exp((\exp(it)-1)\lambda)) =$
$i\lambda i \exp(it)\exp((\exp(it)-1)\lambda) + i\lambda \exp(it) i\lambda \exp(it)\exp((\exp(it)-1)\lambda) =$
$-\lambda \exp(it)\exp((\exp(it)-1)\lambda) - \lambda^2(\exp(it))^2 \exp((\exp(it)-1)\lambda)$
$\Rightarrow$ wg. 7.19 $EY^2 = (-i)^2\frac{\partial^2}{(\partial t)^2}\varphi_Y(t)\Big|_{t=0} = (-1)(-\lambda\exp(0)\exp(0) - \lambda^2(\exp(0))^2\exp(0)) = \lambda + \lambda^2$
$\Rightarrow Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$.

c) Wegen a) gilt: $\varphi_X(t) = \exp((\exp(it)-1)\lambda)$ und $\varphi_Y(t) = \exp((\exp(it)-1)\mu)$.
Da X und Y stochastisch unabhängig sind, gilt wegen 7.18 für alle $t \in \mathbb{R}$: $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \exp((\exp(it)-1)\lambda)\exp((\exp(it)-1)\mu) = \exp((\exp(it)-1)(\lambda+\mu)) \Rightarrow \widehat{P^{X+Y}} = \widehat{Poi(\lambda+\mu)}$ wegen a) $\Rightarrow P^{X+Y} = Poi(\lambda+\mu)$ wegen 7.6.

Aufgabe 48

Seien X und Y k-dimensionale Zufallsvektoren. Für jedes $\ell \in \mathbb{R}^k$ definiere $U_\ell = \ell^T X$ und $V_\ell = \ell^T Y$. Dann sind U_ℓ und V_ℓ Zufallsvariablen.

Voraussetzung: Es gelte für alle $\ell \in \mathbb{R}^k$, dass $P^{U_\ell} = P^{V_\ell}$. Zu zeigen ist, dass dann gelten muss: $P^X = P^Y$. Sind φ_{U_ℓ} und φ_{V_ℓ} die charakteristischen Funktionen von U_ℓ bzw. V_ℓ, so folgt aus der Voraussetzung, dass

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^k, \forall s \in \mathbb{R} : \varphi_{U_\ell}(s) = \varphi_{V_\ell}(s). \tag{1}$$

Sei nun $t \in \mathbb{R}^k$ bel. Dann ist wg. 7.6 $\varphi_X(t) = E\exp(it^TX)$.

Wählt man speziell $\ell = t$, so ist $U_t = t^TX$ und $\forall s \in \mathbb{R}$ ist wg. 7.6 $\varphi_{U_t}(s) = E\exp(it^TXs) \Rightarrow \varphi_{U_t}(1) = \varphi_X(t)$.

Ebenso ist $\varphi_Y(t) = E\exp(it^TY)$ und für $V_t = t^TY$ gilt $\forall s \in \mathbb{R}$, dass $\varphi_{V_t}(s) = E\exp(it^TYs) \Rightarrow \varphi_{Y_t}(1) = \varphi_Y(t)$.

Zusammenfassend ist wegen (1): $\varphi_X(t) = \varphi_{U_t}(1) = \varphi_{V_t}(1) = \varphi_Y(t)$. Da t beliebig war, ist $\varphi_X = \varphi_Y$ und wegen 7.8 folgt $P^X = P^Y$.

Aufgabe 49

Sei F_0 die Verteilungsfunktion der $\mathbb{G}_{[0,1]}$. Dann gilt:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ x, & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{wenn } x \geq 1. \end{cases}$$

Sei $T = \{1/n, \ldots, n/n\}$ und $f : T \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1/n \, \forall t \in T$. Dann ist P^{X_n} die diskrete Verteilung mit Träger T und Dichte f. Sei F_n die Verteilungsfunktion von P^{X_n}. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{j \in T \cap (-\infty, x]} f(j) \\ &= \begin{cases} 0, \text{ wenn } x < 0, \\ \frac{j-1}{n}, \text{ wenn } x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}), j = 1, \ldots, n, \\ 1, \text{ wenn } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Für alle $x \in [0,1) \exists j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$ mit $F_n(x) = \frac{j-1}{n}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - F_n(x) \leq \frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} = \frac{1}{n}, \\ x - F_n(x) \geq \frac{j-1}{n} - \frac{j-1}{n} = 0. \end{cases}$$

Das heißt $\forall x \in [0,1) : |F_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}$ und

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = x = F_0(x).$$

Da für alle $x \notin [0,1)$ gilt $F_n(x) = F_0(x) \, \forall n$, kann geschlossen werden, dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} F_n(x) = x = F_0(x).$$

Daher folgt mit Beh. 8.4;

$$P^{X_n} \xrightarrow{w} \mathbb{G}_{[0,1]}.$$

Ein Lösungsvorschlag für dieses Übungsblatt steht ab dem 13.02.2017 auf der Homepage.