TU DORTMUND Wintersemester 2016/17

Fakultät Statistik 31. Januar 2017

Prof. Dr. J. Kunert

M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
Statistik V

Blatt 14

Aufgabe 43

Sei $\delta > 0$ beliebig. Sei $Y \in \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{A})$ bel. Dann ist $Y^2 \in \mathfrak{M}_+$.

Sei $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ def. durch

$$Z(\omega) = \delta^2 I_{\{|Y| \geq \delta\}}(\omega) = \begin{cases} \delta^2, & \text{falls } |Y(\omega)| \geq \delta \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\forall \omega \in \Omega$:

Fall 1: $\omega \in \{|Y| \geq \delta\} \Rightarrow Y(\omega)^2 \geq \delta^2$ und $Z(\omega) = \delta^2 \Rightarrow Y(\omega)^2 \geq Z(\omega)$.

Fall 2: $\omega \in \{|Y| < \delta\} \Rightarrow Y(\omega)^2 \geq 0$ und $Z(\omega) = 0 \Rightarrow Y(\omega)^2 \geq Z(\omega)$.

Also ingessamt: $Y^2 \geq Z$.

$\Rightarrow \int Y^2 dP \geq \int Z dP = \delta^2 P(\{|Y| \geq \delta\})$ (*)

Wähle speziell: $Y = X - E(X) \in \mathfrak{M}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int (X - E(X))^2 dP = \int Y^2 dP \\ &\overset{(*)}{\geq} \delta^2 P(\{|Y| \geq \delta\}) = \delta^2 P(\{|X - E(X)| \geq \delta\}) \end{aligned}$$

$\overset{\delta>0}{\Rightarrow} P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{Var(X)}{\delta^2}$.

Aufgabe 44

a) $EX^n = \int x^n dP^X(x) = \int x^n I_{[0,1]}(x) d\lambda(x) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (EX^n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1}) = 0$.

b) $E(X^n) = \int (X(\omega))^n dP(\omega)$.

Da $\forall \omega \in X^{-1}((0,1))$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (X(\omega))^n = 0$ und $|X(\omega)|^n \leq |X(\omega)| \leq 1$, gilt $\forall \omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} :$

$|X(\omega)I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)| \leq I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)$.

Da $\int I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)dP(\omega) \leq \int 1dP(\omega) = 1 < \infty$ folgt mit dem Satz von Lebesgue:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int (X(\omega))^n I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)dP(\omega) = \int \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} (X(\omega))^n I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)}_{=0\forall\omega} dP(\omega) = \int 0dP = 0.$

Da noch gilt: $P(X^{-1}((0,1))) = P(X \in (0,1)) = P^X((0,1)) = \int I_{(0,1)}dP^X = \int I_{(0,1)}I_{[0,1]}d\lambda = \int I_{(0,1)}d\lambda = 1$, folgt $X^n = X^n I_{X^{-1}((0,1))}[P]$ und daher $\int X^n dP = \int X^n I_{X^{-1}((0,1))}dP, \forall n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 45

Zeige zunächst, dass Q ein W-Maß ist:

(i) $\forall A \in \mathfrak{B}$ gilt: $Q(A) = a\underbrace{P_1(A)}_{\geq 0} + (1-a)\underbrace{P_2(A)}_{\geq 0} \geq 0$.

(ii) $Q(\emptyset) = aP_1(\emptyset) + (1-a)P_2(\emptyset) = 0$.

(iii) Sei $(A_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{B}$ p.d. Dann ist $Q(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = aP_1(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) + (1-a)P_2(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \underbrace{a}_{\geq 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{P_1(A_n)}_{\geq 0} + \underbrace{(1-a)}_{\geq 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{P_2(A_n)}_{\geq 0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(aP_1(A_n) + (1-a)P_2(A_n)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q(A_n)$.

(iv) $Q(\mathbb{R}) = aP_1(\mathbb{R}) + (1-a)P_2(\mathbb{R}) = a + 1 - a = 1$.

Zusammen folgt: Q ist ein W-Maß.

a) Für $\int UdQ$ verwende Induktion über messbare Funktionen.

Schritt 1: Sei $U = I_A$.

Dann ist $\int UdQ = \int I_A dQ = Q(A) = aP_1(A) + (1-a)P_2(a) = a\int I_A dP_1 + (1-a)\int I_A dP_2 = a\int UdP_1 + (1-a)\int UdP_2$.

Schritt 2: Sei $U = \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j I_{A_j} \in \mathcal{T}_+$.

Dann ist $\int UdQ = \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\int I_{A_j}dQ \overset{1.Schritt}{=} \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(a\int I_{A_j}dP_1 + (1-a)\int I_{A_j}dP_2)$

$= a\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\int I_{A_j}dP_1 + (1-a)\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\int I_{A_j}dP_2 = a\int UdP_1 + (1-a)\int UdP_2$.

Schritt 3: Sei $U \in \mathfrak{M}_+ \Rightarrow \exists (T_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_+$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : T_n(x) \uparrow U(x)$.

Dann ist $\int UdQ = \lim\limits_{n\to\infty}\int T_n dQ \overset{2.Schritt}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(a\underbrace{\int T_n dP_1}_{\to\int UdP_1} + (1-a)\underbrace{\int T_n dP_2}_{\to\int UdP_2})$

$= a\int UdP_1 + (1-a)\int UdP_2$.

Schritt 4: Sei $U \in \mathbb{M}$.

$$\text{Sei } U\ Q\text{-intbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \infty > \int U_+dQ = \underbrace{a}_{\geq 0}\int U_+dP_q + \underbrace{(1-a)}_{\geq 0}\int U_+dP_2 \\ \infty > \int U_-dQ = \underbrace{a}_{\geq 0}\int U_-dP_q + \underbrace{(1-a)}_{\geq 0}\int U_-dP_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int U_+ dP_1 < \infty \text{ und } \int U_+ dP_2 < \infty \\ \int U_- dP_1 < \infty \text{ und } \int U_- dP_2 < \infty \end{cases} \Leftrightarrow U \text{ ist } P_1\text{-intbar und } U \text{ ist } P_2\text{-intbar.}$$

In diesem Fall ist: $\int UdQp = \int U_+ dQ - \int U_- dQ = a \int U_+ dP_1 + (1-a) \int U_+ dP_2 - a \int U_- dP_1 - (1-a) \int U_- dP_2 = a \int U dP_1 + (1-a) \int U dP_2$.

b) Die Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $H(x) = exp(itx)$ lässt sich zerlegen in $H(x) = H_1(x) + iH_2(x)$ mit $H_1(x) = \cos x, H_2(x) = \sin x$.

Also sind H_1 und H_2 stetig $\Rightarrow H_1 \in \mathfrak{M}, H_2 \in \mathfrak{M}$. Da $|H(x)| = 1 \forall x$ ist $H \in \mathcal{L}_1(Q)$ wg. 7.4 $\Rightarrow H_1 \in \mathcal{L}_1, H_2 \in \mathcal{L}_1$.

Mit a) folgt: $\hat{Q}(t) = \int HdQ = \int H_1 dQ + i \int H_2 dQ = a \int H_1 dP_1 + (1-a) \int H_1 dP_2 + i(a \int H_2 dP_1 + (1-a) \int H_2 dP_2) = a(\int H_1 dP_1 + i \int H_2 dP_1) + (1-a)(\int H_1 dP_2 + i \int H_2 dP_2) = a \int H dP_1 + (1-a) \int H dP_2 = a\hat{P}_1(t) + (1-a)\hat{P}_2(t)$.

Aufgabe 46

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist nach Voraussetzung G_ω diffbar.

Dann besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Für jedes $a < b \in T : \exists z \in [a, b]$ mit $\frac{\partial}{\partial t} G_\omega(t)\big|_{t=z} = \frac{G_\omega(b) - G_\omega(a)}{b-a}$.

Daher folgt aus der dritten Voraussetzung, dass $\forall a, b \in T$ und jedes $\omega \in \Omega$ gilt

$|\frac{G_\omega(b) - G_\omega(a)}{b-a}| \leq H(\omega)$. (*)

Sei $t_0 \in T$ fest, bel. Sei $(\delta_n : n \in \mathbb{N})$ bel. Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Def. dann $D_n : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $D_n(\omega) = \frac{G_\omega(t_0 + \delta_n) - G_\omega(t_0)}{\delta_n}$.

Dann gilt:

(i) $\forall \omega \in \Omega : \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t)\big|_{t=t_0} = \lim\limits_{n\to\infty} D_n(\omega)$

(ii) $\forall \omega \in \Omega : |D_n(\omega)| \leq H(\omega)$ wg. (*)

(iii) $\forall \omega \in \Omega : D_n(\omega) = \frac{G_{t_0+\delta_n}(\omega) - G_{t_0}(\omega)}{\delta_n}$.

Somit folgt: $\int \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t)\big|_{t=t_0} d\mu(\omega) \overset{(i)}{=} \int \lim\limits_{n\to\infty} D_n(\omega) \overset{(ii) \text{ und Satz v. Lebesgue}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int D_n d\mu$ $\overset{(iii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_n}(\int G_{t_0+\delta} d\mu - \int G_t d\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\int G(\omega, t_0+\delta_n) d\mu(\omega) - \int G(\omega, t_0) d\mu(\omega)}{\delta_n}$.

Da $(\delta_n : n \in \mathbb{N})$ bel. war, folgt $\int G(\omega, .) d\mu(\omega)$ ist diffbar an der Stelle t_0 mit $\frac{\partial}{\partial t} \int G(\omega, t) d\mu(\omega)\big|_{t=t_0} = \int \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t)\big|_{t=t_0} d\mu(\omega)$.

Da t_0 bel. war, folgt $\frac{\partial}{\partial t} \int G(\omega, t) d\mu(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t) d\mu(\omega)$.

Abgabe bis Dienstag, den 07.02.2017, 8.30 Uhr in der Vorlesung.