TU DORTMUND Wintersemester 2016/17
Fakultät Statistik 31. Januar 2017
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
Statistik V

Blatt 14

Aufgabe 43

Sei X eine Zufallsvariable, so dass EX^2 existiert. Man zeige die Tschebycheff-Ungleichung:

Für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$P(|X - EX| \geq \delta) \leq \frac{VarX}{\delta^2}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jede Zufallsvariable Y gilt:

$$\int Y^2(\omega)dP(\omega) \geq \delta^2 P\left(\{\omega \in \Omega : |Y(\omega)| \geq \delta\}\right).$$

Aufgabe 44

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ so, dass P^X die stetige Gleichverteilung auf $[0, 1]$ ist.

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} EX^n$ durch Integration von X^n.

b) Können Sie $\lim\limits_{n\to\infty} EX^n$ auch bestimmen, ohne die einzelnen $E(X^n)$ zu berechnen?

Hinweis: Beachten Sie, dass $X(\omega) = X(\omega)I_{X^{-1}((0,1))}(\omega)$. [P]

Aufgabe 45

Seien P_1 und P_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Fourier-Transformierten $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$. Sei $0 < a < 1$. Dann ist auch $Q = aP_1 + (1-a)P_2$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

a) Zeigen Sie, dass für beliebiges $U \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ gilt: U ist Q-integrierbar $\Leftrightarrow$ U ist P_1- und P_2-integrierbar. In diesem Falle gilt: $\int U dQ = a \int U dP_1 + (1-a) \int U dP_2$.

b) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte $\hat{Q}$ des Wahrscheinlichkeitsmaßes Q und für jedes $t \in I\!R$ gilt $\hat{Q}(t) = a\hat{P}_1(t) + (1-a)\hat{P}_2(t)$.

Aufgabe 46

Sei $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ ein Maßraum, $T \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $G : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall\, t \in T$ ist $G_t : \omega \to G(\omega, t)$ über Ω μ-integrierbar,
- $\forall\, \omega \in \Omega$ ist $G_\omega : t \to G(\omega, t)$ differenzierbar in t und
- $\exists\, H \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$, so dass $\forall\, t_0 \in T$ und $\forall\, \omega \in \Omega$: $\left| \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t)|_{t=t_0} \right| \leq H(\omega)$.

Man zeige, dass $\frac{\partial}{\partial t} \int G(\omega, t)\, d\mu(\omega) = \int \frac{\partial}{\partial t} G(\omega, t)\, d\mu(\omega)$.

Hinweis: *Verwenden Sie den Satz von Lebesgue und den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Abgabe bis Dienstag, den 07.02.2017, 8.30 Uhr in der Vorlesung.