TU DORTMUND Wintersemester 2016/17
Fakultät Statistik 17. Januar 2017
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
STATISTIK V

Blatt 12

Aufgabe 36

Beweisen Sie Behauptung 5.4 aus der Vorlesung: Sei $f \in \mathfrak{M}_+$ und das Maß ν definiert durch $d\nu = f\,d\mu$. Sei $G \in \mathfrak{M}$. Dann gilt:

$$G \text{ ist } \begin{cases} \nu - \text{quasiintegrierbar} \\ \nu - \text{integrierbar} \end{cases} \Leftrightarrow G \cdot f \text{ ist } \begin{cases} \mu - \text{quasiintegrierbar} \\ \mu - \text{integrierbar.} \end{cases}$$

In beiden Fällen ist $\int G\,d\nu = \int G \cdot f\,d\mu$.

Hinweis: Benutzen Sie die Induktion über messbare Funktionen.

Aufgabe 37

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $X_n(x) = \frac{x}{n} I_{[-1,n]}(x)$.

a) Zeigen Sie, dass $X_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} X_n$.

c) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int X_n d\lambda$ und $\int \lim_{n\to\infty} X_n d\lambda$. Dabei ist λ das Lebesgue-Maß.

d) Sei P ein beliebiges W-Maß. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int X_n dP$ und $\int \lim_{n\to\infty} X_n dP$.

Aufgabe 38

Seien $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$. Sei $x_1 \in \Omega_1$ beliebig fest gewählt.

Für $B \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ definiere: $B_x = \left\{ \omega \in \Omega_2 : \begin{bmatrix} x \\ \omega_2 \end{bmatrix} \in B. \right\}$

a) Zeigen Sie: $\forall B \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ ist $(B_x)^C = (B^C)_x$.

b) Sei $(B_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$.
Zeigen Sie, dass $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_x$. Für paarweise disjunkte $(B_n : n \in \mathbb{N})$ zeigen Sie, dass auch $((B_n)_x : n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt sind.

c) Sei $B = A_1 \times A_2$ mit $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$. Zeigen Sie, dass $B_x = \begin{cases} A_2, & \text{falls } x \in A_1 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$.

d) Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ und $B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$. Bestimmen Sie B_x für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 39

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume. Sei $x \in \Omega_1$ beliebig und zu $B \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ sei B_x definiert wie in Aufgabe 38. Definieren Sie das Mengensystem $\mathcal{L} := \{B \subset \Omega_1 \times \Omega_2 : B_x \in \mathcal{A}_2\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ eine σ-Algebra über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist.

Abgabe bis Dienstag, den 24.01.2017, 8.30 Uhr in der Vorlesung.