TU DORTMUND Wintersemester 2016/17

Fakultät Statistik 10. Januar 2017

Prof. Dr. J. Kunert

M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung

Statistik V

Blatt 11

Aufgabe 33

Sei $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(G_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{M}_+$. Zeigen Sie

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n \in \mathfrak{M}_+$.

b) $\int \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n \, d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int G_n \, d\mu$.

Aufgabe 34

Seien $a, b \in \mathbb{R}\, a < b$ und sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Die Abbildung $U \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sei auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Definieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für $k \in \{1, ..., 2^n\}$ das Intervall

$$B_k^{(n)} := \left[a + \frac{b-a}{2^n}(k-1), a + \frac{b-a}{2^n}k\right]$$

und $\alpha_k^{(n)} = \inf\{U(\omega) : \omega \in B_k^{(n)}\}$. Dann ist $s_n := \sum\limits_{k=1}^{2^n} \alpha_k^{(n)} \frac{b-a}{2^n}$ Riemann'sche Untersumme und Sie wissen aus Analysis, dass $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int_a^b U(\omega) d\omega$ ist.

a) Konstruieren Sie eine Treppenfunktion $T_n \in \mathcal{T}_+(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: $s_n = \int T_n d\lambda$ und für alle $\omega \in \Omega : T_n(\omega) \leq T_{n+1}(\omega)$ und dass für alle Stetigkeitsstellen ω von U in $[a, b]$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\omega) = U(\omega)$.

b) Zeigen Sie, dass $\int_a^b U(\omega) d\omega = \int I_{[a,b]} U d\lambda$.

Hinweis zu b): Benutzen Sie, dass die Riemann-integrierbare Funktion U in $[a, b]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben kann.

Aufgabe 35

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und sei $(G_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{M}_+$ definiert durch

$G_n(x) = I_{[-1,1]}(x)\ (1 - \frac{cos(x)}{n})$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \int G_n d\mu = \mu([-1,1])$.

Abgabe bis Dienstag, den 17.01.2017, 8.30 Uhr in der Vorlesung.