TU DORTMUND Wintersemester 2016/17
Fakultät Statistik 20. Dezember 2016
Prof. Dr. J. Kunert
M. Sc. Ch. Neumann

Übungen zur Vorlesung
Statistik V

Blatt 10

Aufgabe 29

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und seien $G, U \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{A})$.

Zeigen Sie: Ist $G \leq U$, dann ist $\int G d\mu \leq \int U d\mu$.

Hinweis: Betrachten Sie $(T_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_+$ *und* $(H_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_+$ *mit* $T_n \uparrow G$ *und* $H_n \uparrow U$.

Aufgabe 30

Betrachten Sie den Messraum $(\Omega, \mathcal{B})$ und $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wobei

$$G(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \frac{1}{2} \leq \omega < 1, \\ 0, & \text{falls } \omega < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sei P die Binomialverteilung mit Parametern 3 und $\frac{1}{2}$. Sei weiter Q die Gleichverteilung auf $[0, 3]$, d.h. das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ wobei

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 3, \\ \frac{x}{3}, & \text{falls } 0 < x < 3, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Stellen Sie G als Treppenfunktion dar und berechnen Sie $\int G dP$ sowie $\int G dQ$.

Aufgabe 31

Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ und P die Exponentialverteilung mit Parameter λ.

a) Konstruieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine punktweise monoton nicht fallende Funktionenfolge $(T_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{T}_+$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = G$ und berechnen Sie $\int T_n dP$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie anschließend $\int G dP$.

c) Sei Q die Binomialverteilung mit Parametern m und π. Berechnen Sie $\int G dQ$.

<u>Hinweis:</u> *Untersuchen Sie die Abbildungen $(T_n : n \in \mathbb{N})$ aus Aufgabe 28. Betrachten Sie in c) insbesondere den Fall $n > m$. Beachten Sie, dass für eine Riemann-integrierbare Abbildung H gilt, dass $\int\limits_0^\infty H(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n2^n} H(\frac{k}{2^n})$.*

<u>Aufgabe 32</u>

Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar mit nicht notwendig stetiger Ableitung G'.

Man beweise: $G' \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

<u>Hinweis:</u> *Untersuchen Sie die Messbarkeit des Differenzenquotienten.*

Abgabe bis Dienstag, den 10.01.2017, 8.30 Uhr in der Vorlesung.