

W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

Übung 8

Aufgabe 1 : Motivation

Anhand von Daten soll eine Aussage über die voraussichtliche Verteilung zukünftiger Daten gemacht werden, z.B. die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass Beobachtungen eine bestimmte Grenze G nicht überschreiten, d.h.

$$P(X \leq G).$$

Kennen wir die Verteilungsfunktion F von X , dann kennen wir $P(X \leq G) = F(G)$. Ziel: Bestimme F . In R kann dies Problem graphisch untersucht werden.

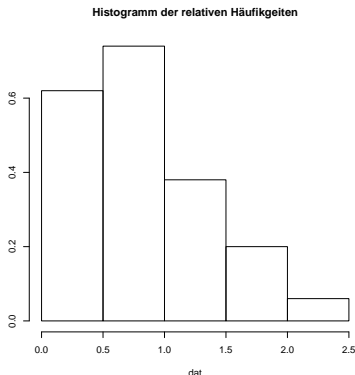
Aufgabe 1 : Beispiel

Gegeben sind Daten zur Lebensdauer von Bauteilen:

1.10	1.48	1.67	1.76	0.03	0.42	1.67	0.56	1.88	0.13
0.44	0.13	0.09	1.23	0.77	0.42	0.38	0.40	0.90	0.88
0.79	2.23	0.87	1.22	0.97	1.05	0.52	1.05	0.44	0.85
0.91	0.85	1.49	0.71	2.49	1.64	0.18	1.33	1.03	1.14
0.08	0.46	0.99	0.77	0.33	0.66	0.35	0.72	1.37	0.50
0.63	0.21	0.75	1.16	1.04	0.22	0.72	0.42	1.13	0.29
1.18	1.06	0.21	0.87	0.51	0.25	0.57	1.36	0.11	0.88
1.23	0.89	0.60	1.60	0.90	0.75	0.98	0.88	0.29	1.59
0.84	0.90	1.77	1.35	0.33	1.53	0.36	0.87	0.29	1.76
0.43	0.47	0.32	0.55	0.59	0.67	0.43	0.97	2.50	0.69

Aufgabe 1 : Beispiel - Histogramm

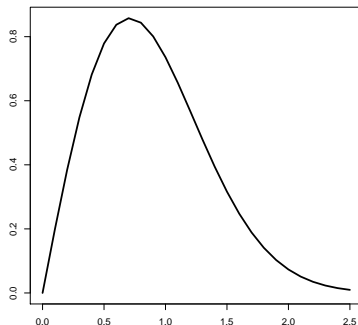
Zunächst kann das Histogramm geplottet werden. Dies liefert einen Ansatz zur Wahl einer geeigneten Verteilungsklasse.



Man erkennt, dass eine nicht symmetrische Verteilung vorliegt (also keine Normalverteilungsannahme möglich).

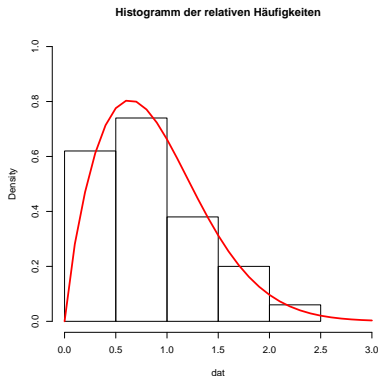
Aufgabe 1 : Beispiel - Mögliche Verteilung

Wähle anhand des Histogramms passende Verteilungsklasse. Hier z.B. Weibull-Verteilung, da die Dichte für $\alpha > 1$ ca. folgenden Verlauf hat:



Aufgabe 1 : Beispiel - Vergleich

Histogramm mit Dichte der Weibull-Verteilung mit $\alpha = 1.8$, $\beta = 1$
(Parameter können mit geeigneten parametrischen Schätzmethoden bestimmt werden)



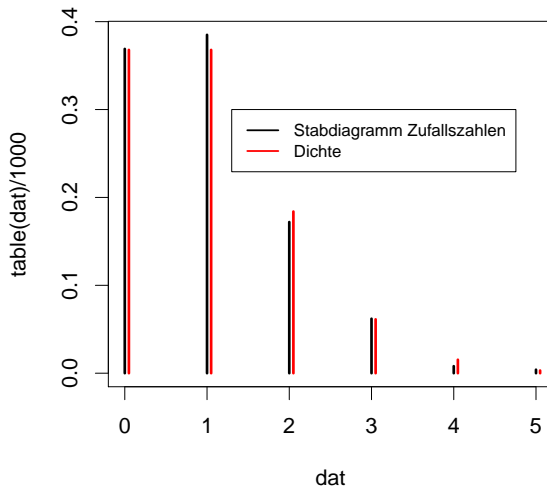
Aufgabe 1 : Poisson-Verteilung

Dichte: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für $k = 0, 1, 2, \dots$

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
<code>rpois(10000,lambda=1)</code>	<code>dpois(x,lambda=1)</code>

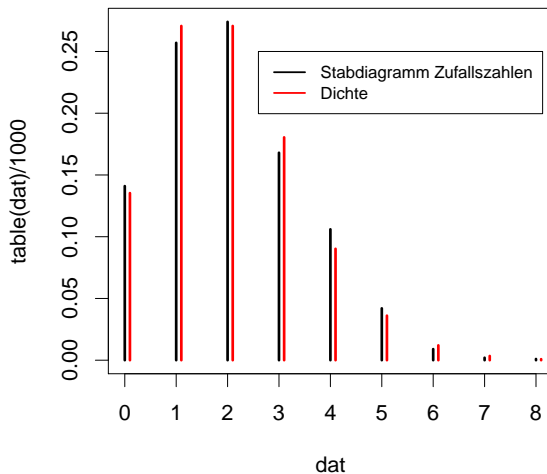
Aufgabe 1 : Poisson-Verteilung - Abbildungen

Poissonverteilung mit $\lambda=1$



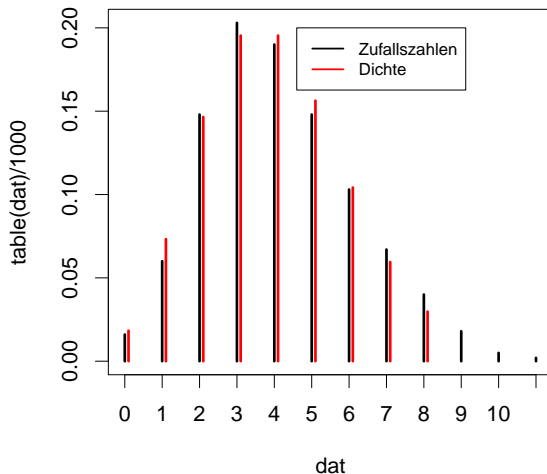
Aufgabe 1 : Poisson-Verteilung - Abbildungen

Poissonverteilung mit $\lambda=2$



Aufgabe 1 : Poisson-Verteilung - Abbildungen

Poissonverteilung mit $\lambda=4$



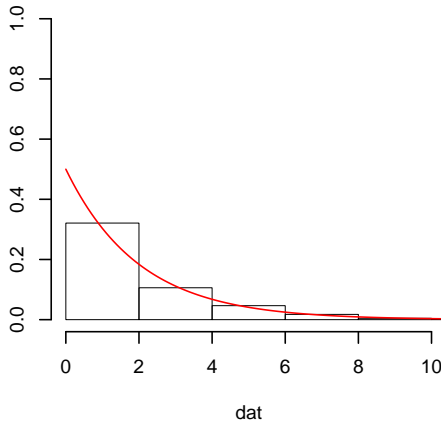
Aufgabe 1 : Exponential-Verteilung

Dichte: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$, sonst $f(x) = 0$

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
<code>rexp(10000,lambda=1)</code>	<code>dexp(x,lambda=1)</code>

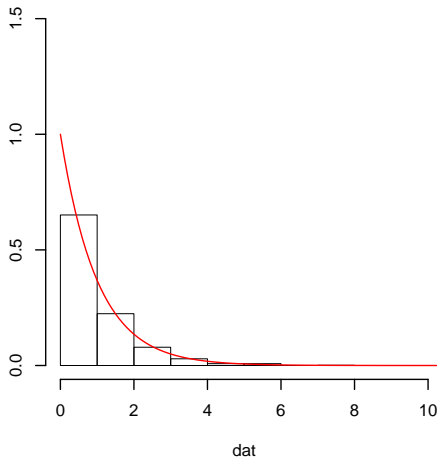
Aufgabe 1 : Exponential-Verteilung - Abbildungen

Exponentialverteilung mit $\lambda=1/2$



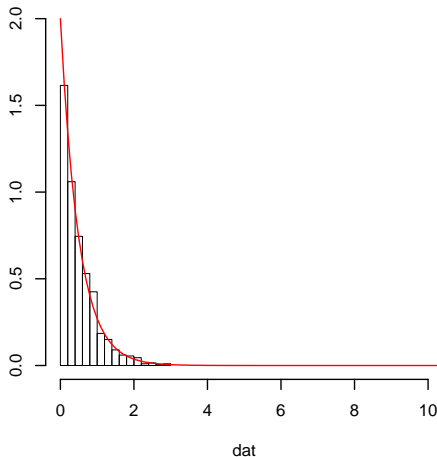
Aufgabe 1 : Exponential-Verteilung - Abbildungen

Exponentialverteilung mit $\lambda=1$



Aufgabe 1 : Exponential-Verteilung - Abbildungen

Exponentialverteilung mit $\lambda=2$



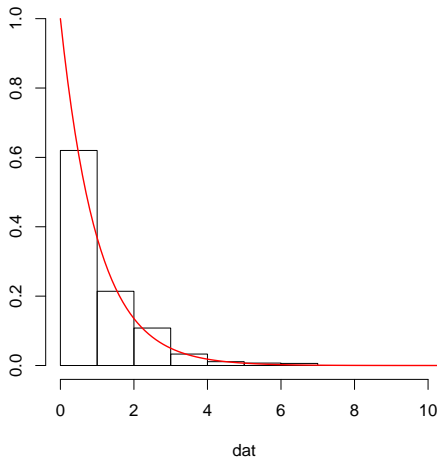
Aufgabe 1 : Weibull-Verteilung

Dichte: $f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$ für $x \geq 0$, sonst $f(x) = 0$
 α =shape (Formparameter), β =scale (Skalenparameter)

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
<code>rweibull(10000,shape=1,scale=1)</code>	<code>dweibull(x,shape=1,scale=1)</code>

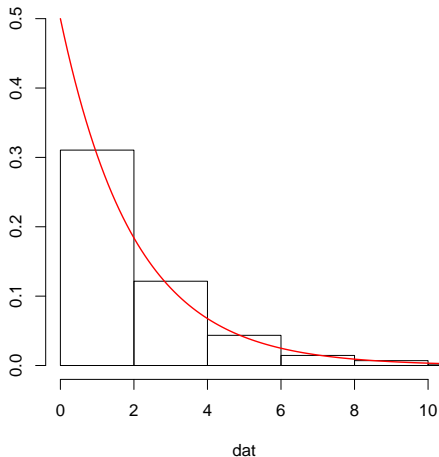
Aufgabe 1 : Weibull-Verteilung - Abbildungen

Weibullverteilung mit $\alpha=1=\beta$



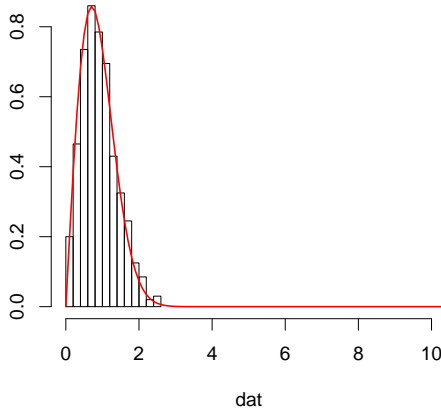
Aufgabe 1 : Weibull-Verteilung - Abbildungen

Weibullverteilung mit $\alpha=1$, $\beta=2$



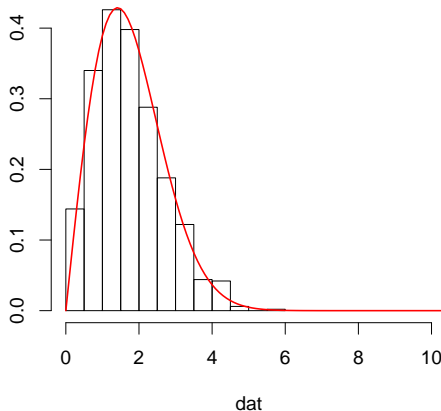
Aufgabe 1 : Weibull-Verteilung - Abbildungen

Weibullverteilung mit $\alpha=2$, $\beta=1$



Aufgabe 1 : Weibull-Verteilung - Abbildungen

Weibullverteilung mit $\alpha=2$, $\beta=2$



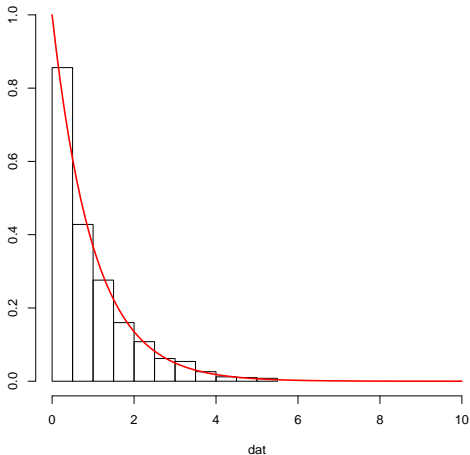
Aufgabe 1 : Gamma-Verteilung

Dichte: $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}$ für $x \geq 0$, sonst $f(x) = 0$ $\beta = \text{shape}$,
 $\alpha = \text{rate}$, bzw. $\frac{1}{\alpha} = \text{scale}$

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
<code>rgamma(10000,shape=1,scale=1)</code>	<code>dgamma(x,shape=1,scale =1)</code>

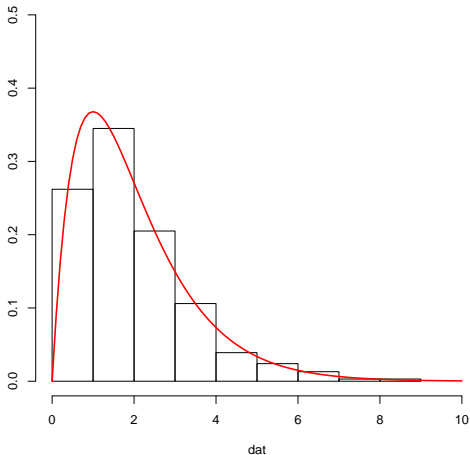
Aufgabe 1 : Gamma-Verteilung - Abbildungen

Gamma-Verteilung mit $\alpha=1$, $\beta=1$



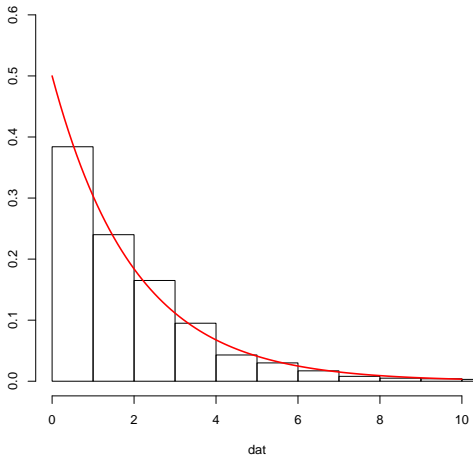
Aufgabe 1 : Gamma-Verteilung - Abbildungen

Gamma-Verteilung mit $\alpha=1$, $\beta=2$



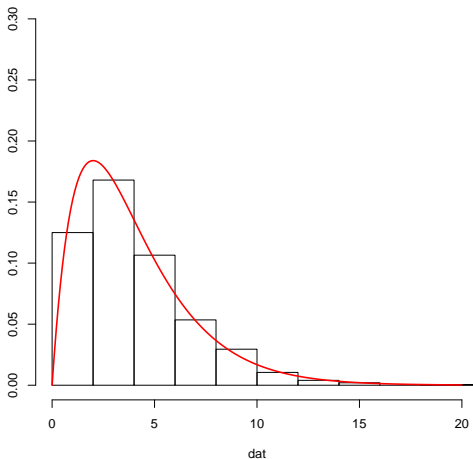
Aufgabe 1 : Gamma-Verteilung - Abbildungen

Gamma-Verteilung mit $\alpha=1$, $\beta=2$



Aufgabe 1 : Gamma-Verteilung - Abbildungen

Gamma-Verteilung mit $\alpha=2$, $\beta=2$



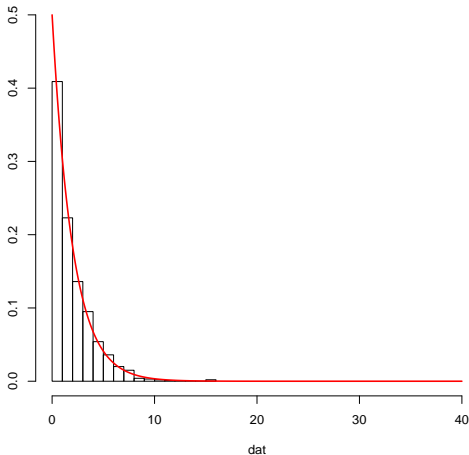
Aufgabe 1 : χ^2 -Verteilung

Dichte: $f(x) = \frac{1}{2^{f/2}\Gamma(f/2)} x^{f/2-1} e^{-x/2}$ für $x \geq 0$, sonst $f(x) = 0$
 $f = df$ Freiheitsgrade

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
<code>rchisq(10000,df=1)</code>	<code>dchisq(x,df =1)</code>

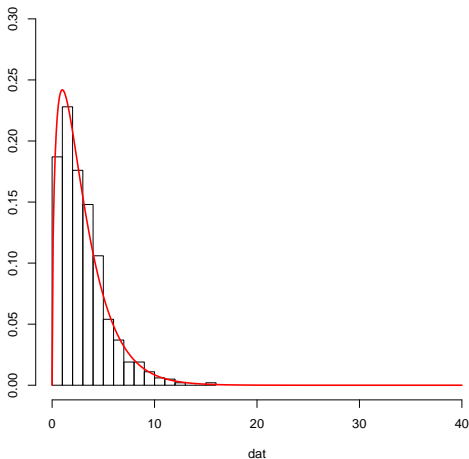
Aufgabe 1 : χ^2 -Verteilung - Abbildungen

χ^2 -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden



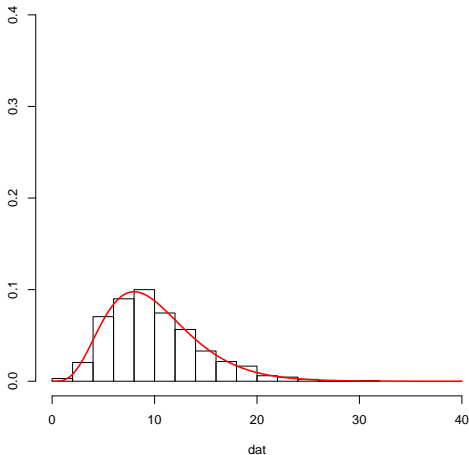
Aufgabe 1 : χ^2 -Verteilung - Abbildungen

χ^2 -Verteilung mit 3 Freiheitsgraden



Aufgabe 1 : χ^2 -Verteilung - Abbildungen

χ^2 -Verteilung mit 10 Freiheitsgraden



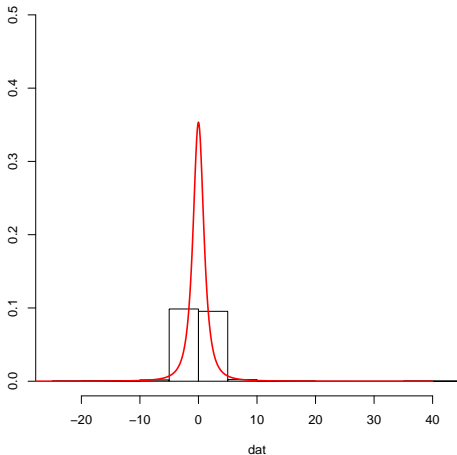
Aufgabe 1 : t -Verteilung

Dichte: $f(x) = \frac{\Gamma((f+1)/2)}{\sqrt{f\pi}\Gamma(f/2)}(1 + x^2/f)^{-(f+1)/2}$ für $x \in \mathbb{R}$ $f = df$
Freiheitsgrade

erzeuge Zufallszahlen	Dichtefunktion an der Stelle x
rt(10000,df=1)	dt(x,df =1)

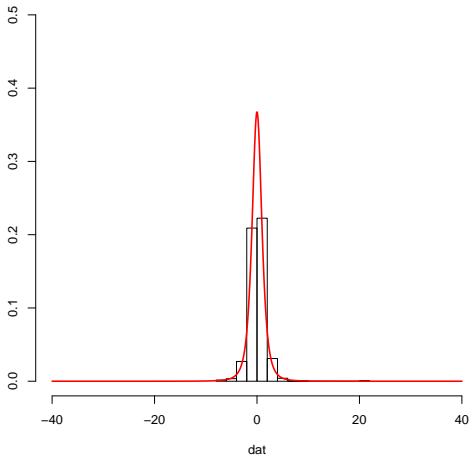
Aufgabe 1 : t -Verteilung - Abbildungen

t -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden



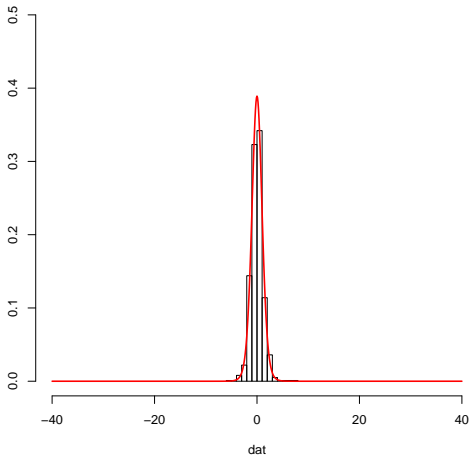
Aufgabe 1 : t -Verteilung - Abbildungen

t -Verteilung mit 3 Freiheitsgraden



Aufgabe 1 : t -Verteilung - Abbildungen

t -Verteilung mit 10 Freiheitsgraden



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung

- Eine zwei dimensionale Normalverteilung besitzt die Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right]$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+, \rho \in (-1, 1)$$

Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung

- Eine zwei dimensionale Normalverteilung besitzt die Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right]$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+, \rho \in (-1, 1)$$

- Parameter können interpretiert werden als Lage- und Skalenparameter zweier Normalverteilungen $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$ und Parameter für die Abhängigkeit der beiden Verteilungen ρ

Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung

- Eine zwei dimensionale Normalverteilung besitzt die Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right]$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+, \rho \in (-1, 1)$$

- Parameter können interpretiert werden als Lage- und Skalenparameter zweier Normalverteilungen $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$ und Parameter für die Abhängigkeit der beiden Verteilungen ρ
- Dichte in R ist im Vorlesungsskript bzw. Online verfügbar

Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung

- Eine zwei dimensionale Normalverteilung besitzt die Dichte

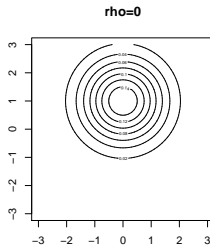
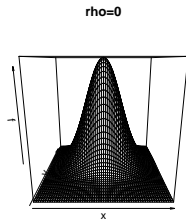
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right]$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+, \rho \in (-1, 1)$$

- Parameter können interpretiert werden als Lage- und Skalenparameter zweier Normalverteilungen $(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$ und Parameter für die Abhängigkeit der beiden Verteilungen ρ
- Dichte in R ist im Vorlesungsskript bzw. Online verfügbar
- Zum plotten müssen alle Kombinationen von x,y verwendet werden, daher Anpassung der gegebenen Dichtefunktion (Vgl. Skript)

Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (a)

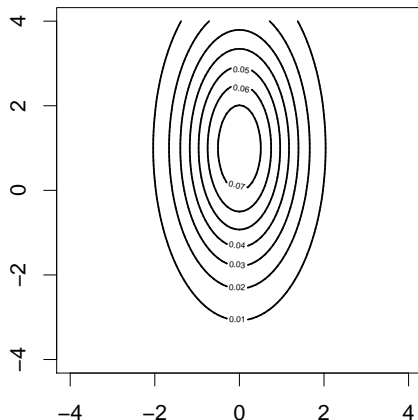
$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \rho = 0$$



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (b)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \underline{\sigma_2 = 2}, \rho = 0$$

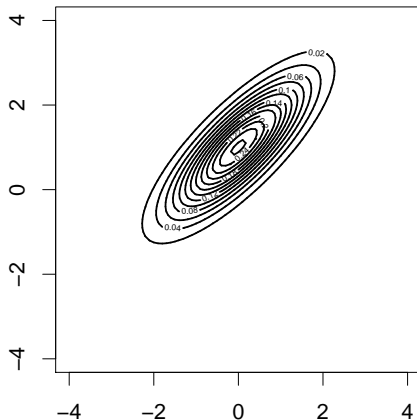
rho=0



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (c)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \underline{\sigma_2 = 1}, \underline{\rho = 0.8}$$

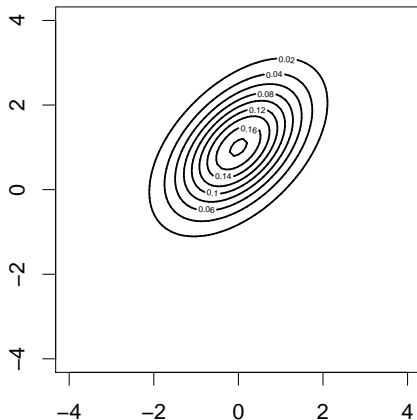
rho=0.8



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (d)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \underline{\rho = 0.5}$$

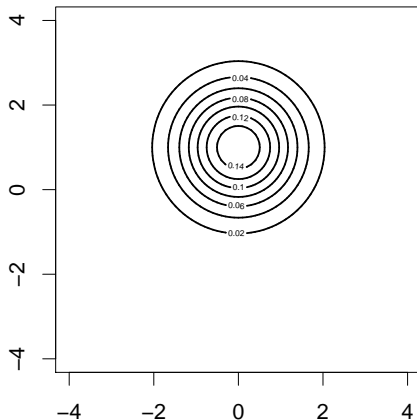
rho=0.5



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (e)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \underline{\rho = 0}$$

rho=0



Aufgabe 2 : 2-dimensionale Normalverteilung (f)

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \underline{\rho = -0.8}$$

rho=-0.8

