

W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

Übung 9

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien B_1, \dots, B_n eine Zerlegung des Grundraums Ω , d.h.

B_1, \dots, B_n sind paarweise disjunkt (keine gemeinsamen Punkte)

und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Ferner gelte $P(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Aufgabe 1 a) : Aufgabenstellung

- Ereignisse:

$$L_i = \{\text{Lieferant ist } i\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D = \{\text{Defekt tritt auf}\}.$$

- Gegeben:

$$\mathbb{P}[L_i] \text{ und } \mathbb{P}[D|L_i]$$

Lieferanten	Defekt bei bekanntem Lieferanten
$\mathbb{P}[L_1] = 0.3$	$\mathbb{P}[D L_1] = 0.1$
$\mathbb{P}[L_2] = 0.2$	$\mathbb{P}[D L_2] = 0.05$
$\mathbb{P}[L_3] = 0.4$	$\mathbb{P}[D L_3] = 0.05$
$\mathbb{P}[L_4] = 0.1$	$\mathbb{P}[D L_4] = 0.9$

- Gesucht:

$$\mathbb{P}[D] \stackrel{\text{tot. Wkeit.}}{=} \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}[D|L_i] \cdot \mathbb{P}[L_i]$$

- Lösung:

$$\mathbb{P}[D] \stackrel{\text{tot. Wkeit.}}{=} \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}[D|L_i] \cdot \mathbb{P}[L_i]$$

$$= 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.9 = \mathbf{0.15}$$

- In R kann man nutzen, dass R Vektoren komponentenweise multipliziert
 - Definiere Vektor mit Wahrscheinlichkeiten für Lieferanten
`pLi<-c(0.3,0.2,0.4,0.1)`
 - Definiere Vektor mit bedingten Wahrscheinlichkeiten der Defekte bei gegebenen Lieferanten
`pDLi<-c(0.1,0.05,0.05,0.9)`
 - Berechne Lösung durch
`sum(pDLi*pLi)`
`[1] 0.15`

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien B_1, \dots, B_n eine Zerlegung des Grundraums Ω , d.h.

B_1, \dots, B_n sind paarweise disjunkt (keine gemeinsamen Punkte)

und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Ferner gelte $P(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $P(A) > 0$. Dann gilt:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

- Gegeben:

Alle Wahrscheinlichkeiten auf Aufgabenteil a)

- Gesucht:

$$\mathbb{P}[L_1|D] \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}[D|L_1] \cdot \mathbb{P}[L_1]}{\mathbb{P}[D]}$$

- In R: Nutze bisheriges Ergebnis und R als Taschenrechner
- $\mathbb{P}[L_1|D] = 0.2$

- Wahrscheinlichkeiten stetiger Verteilungen können mit Verteilungsfunktion bestimmt werden

$$\mathbb{P}[X \leq x] = F(x)$$

$$\mathbb{P}[X \geq x] = 1 - F(x)$$

WARNUNG: Gilt nur, weil Exponentialverteilung stetig und Wahrscheinlichkeiten in einzelnen Punkten dann immer 0 sind.

- Für die bedingten Verteilungen nutze

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt}}{\text{Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt}}$$

- Nutzen in R:

$$\text{pexp}(q, \text{rate}) = F(q)$$

für $\text{Exp}(\text{rate})$ verteilte Variable

Aufgabe 2 : Ergebnisse

Sei F die Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung mit $\lambda = 1$, dann berechnet man:

$$\mathbb{P}[X \geq 3] = 1 - F(3) = 0.05$$

$$\mathbb{P}[X \geq \frac{1}{2}] = 1 - F(1/2) = 0.61$$

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - F(1) = 0.37$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \geq 1 | X \geq \frac{1}{2}] &= \frac{\mathbb{P}[\{X \geq 1\} \cap \{X \geq \frac{1}{2}\}]}{\mathbb{P}[X \geq \frac{1}{2}]} = \frac{\mathbb{P}[X \geq 1]}{\mathbb{P}[X \geq \frac{1}{2}]} \\ &= \frac{1 - F(1)}{1 - F(1/2)} = 0.61 = \mathbb{P}[X \geq \frac{1}{2}]\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[X \geq 2 | X \geq 1] = \dots = 0.37 = \mathbb{P}[X \geq 1]$$

$$\mathbb{P}[X \geq 4 | X \geq 1] = \dots = 0.05 = \mathbb{P}[X \geq 3]$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit hängt nur von der Differenz der Zeitpunkte ab! (Gedächtnislosigkeit)

Aufgabe 3 : Grundlage

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0		0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

- Zeilen und Spaltensummen ergeben die Randwahrscheinlichkeiten
- Randwahrscheinlichkeiten müssen sich zu 1 addieren
- Einzelwahrscheinlichkeiten müssen sich zu 1 addieren

Aufgabe 3 : Rechnung

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0		0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3 : Rechnung

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			
$P(X = i, Y = j)$		1	2	3	$P(X = i)$
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			
$P(X = i, Y = j)$		1	2	3	$P(X = i)$
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			$P(X = i)$
$P(X = i, Y = j)$		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		0.4
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			$P(X = i)$	
		1	2	3		
X	$P(X = i, Y = j)$	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$		0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$		0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$		0.4
$P(Y = j)$						

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	$P(X = i, Y = j)$	1	2	3	
	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	0.4
$P(Y = j)$		$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	

Aufgabe 3 : Rechnung

		Y			
$P(X = i, Y = j)$		1	2	3	$P(X = i)$
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	0.4
$P(Y = j)$		$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	1

Aufgabe 4 : Versagen von Flugzeugen

- Turbinen fallen unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p=0.5$ aus
- Einzelausfälle interpretierbar als Münzwurf mit 1 für Ausfall, 0 für keinen Ausfall
- Also: $T_1, T_2 \sim \text{Bin}(1, p)$, T_1, T_2 unabhängig
- Totalausfall tritt ein, wenn $T_1 = T_2 = 1$ bzw. $T_1 + T_2 = 2$
- Funktionsfähigkeit bedeutet also $T_1 + T_2 \leq 1$
- Suchen: $\mathbb{P}[T_1 + T_2 \leq 1]$

Aufgabe 4 : Versagen von Flugzeugen

Vorlesung liefert (Vgl. Bsp.: 15.4.2. oder Satz 15.4.3.)

Für $T_1, T_2 \sim \text{Bin}(1, p)$ ist $B_2 = T_1 + T_2 \sim \text{Bin}(2, p)$

Suchen also:

$$\mathbb{P}[B_2 \leq n] = \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Mit $N = 2$ und $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B \leq 1] &= \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} \frac{1}{2}^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-k} \\ &= \binom{2}{0} \frac{1}{2}^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0} + \binom{2}{1} \frac{1}{2}^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} \\ &= 0.75\end{aligned}$$

in R: `pbinom(1,2,0.5)`

Aufgabe 4 : Versagen von Flugzeugen

Analog mit Turbinen T_1, T_2, T_3, T_4

$$B_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Suchen:

$$\mathbb{P}[B_4 \leq 2] = \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} \frac{1}{2}^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-k}$$

$(N = 4, p = \frac{1}{2})$ Man erhält:

$$\mathbb{P}[B_4 \leq 2] = 0.6875$$

in R: `pbinom(2,4,0.5)`

Das war's für 2011

-

Guten Rutsch und ein frohes neues
Jahr!

Nächste Übung : ???