

Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften

Übung 12

Aufgabe 1

Datensatz BLECH.DAT (Dicken von 15 zufällig ausgewählten Blechen in $10\mu\text{m}$):

346, 363, 360, 318, 346, 268, 299, 287, 310, 349, 333, 365, 281, 265, 344.

Betrachten das Testproblem $H_0 : \mu = 310$ (Hypothese) gegen $H_1 : \mu \neq 310$ (Alternative) für diesen Datensatz.
Benutze den sogenannten **t-Test**.

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Wähle als Teststatistik $T(x) = \sqrt{N} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s(x)}$.

```
> BLECH<-c(346,363,360,318,346,268,299,287,310,349,333,365,  
+ 281,265,344)  
> mean(BLECH)  
[1] 322.2667  
> sd(BLECH)  
[1] 35.07027  
> sqrt(15)*abs(mean(BLECH)-310)/sd(BLECH)  
[1] 1.354669
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- ▶ P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$
- ▶ unter $H_0 : \mu = 310$ gilt $\sqrt{N} \frac{|\bar{X} - 310|}{s(x)} \sim t_{N-1}$
- ▶ P-Wert hier $2F_{t_{N-1}}(-T(x)) = 2F_{t_{14}}(-1.354669)$
- ▶ `2*pt(-T,df=14)` in R liefert 0.3342819
- ▶ dasselbe Ergebnis liefert auch `t.test(BLECH,alternative='two.sided',mu=310)`

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Kennt man die Verteilung der Teststatistik nicht, kann der P-Wert auch durch Simulationen (näherungsweise) bestimmt werden:

Simuliere P-Wert:

- ▶ erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 310$ und σ^2 (sodass H_0 gilt)
- ▶ berechne für alle x^m die Teststatistik
- ▶ bestimme den Anteil der Teststatistiken, die größer als die beobachtete: Dieser Anteil entspricht dem P-Wert

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

$\sigma = 1$

```
> ts<-numeric(10000)
> for (i in (1:10000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,310,1)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> 1/10000*sum(ts>=T)
[1] 0.2001
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

$$\sigma = 30$$

```
> ts<-numeric(10000)
> for (i in (1:10000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,310,30)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> 1/10000*sum(ts>=T)
[1] 0.1947
```

Aufgabe 1 (c):

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Entscheidungsregel, die nicht den P-Wert benutzt: Lehne H_0 ab,
falls $T(x) > t_{N-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ gilt.

```
> qt(0.975,df=14)
[1] 2.144787
```

Aufgabe 1 (d)

Fehler 2. Art: Entscheidung für H_0 , obwohl H_1 gilt.

Für den t-Test: Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art, wenn der wahre Mittelwert μ ist:

$$F_{t_{N-1}\left(\frac{\sqrt{N}(\mu-\mu_0)}{\sigma}\right)}\left(t_{N-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F_{t_{N-1}\left(\frac{\sqrt{N}(\mu-\mu_0)}{\sigma}\right)}\left(-t_{N-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

also hier:

$$P_{H1}(T(X) \leq t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) = F_{t_{14}\left(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma}\right)}\left(t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F_{t_{14}\left(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma}\right)}\left(-t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Aufgabe 1 (d) und (e)

$$\sigma = 1$$

```
> ncp<-sqrt(15)*(300-310)/1
> pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
-pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
[1] 0
```

$$\sigma = 30$$

```
> ncp<-sqrt(15)*(300-310)/30
> pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
-pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
[1] 0.7745203
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Aufgabe 1 (f)

Simulation der Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn $\mu = 300$ gilt.

- ▶ erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 300$ und σ^2
- ▶ Berechne für jede Stichprobe die zugehörige Teststatistik
- ▶ zähle Anteil, wie oft Teststatistik unter kritischem Wert, also wie oft H_0 nicht abgelehnt wird = Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für $\mu = 300$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

```
> ts<-numeric(10000)
> for (i in (1:10000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,300,1)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> sum(ts<=qt(0.975,df=14))
[1] 0
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

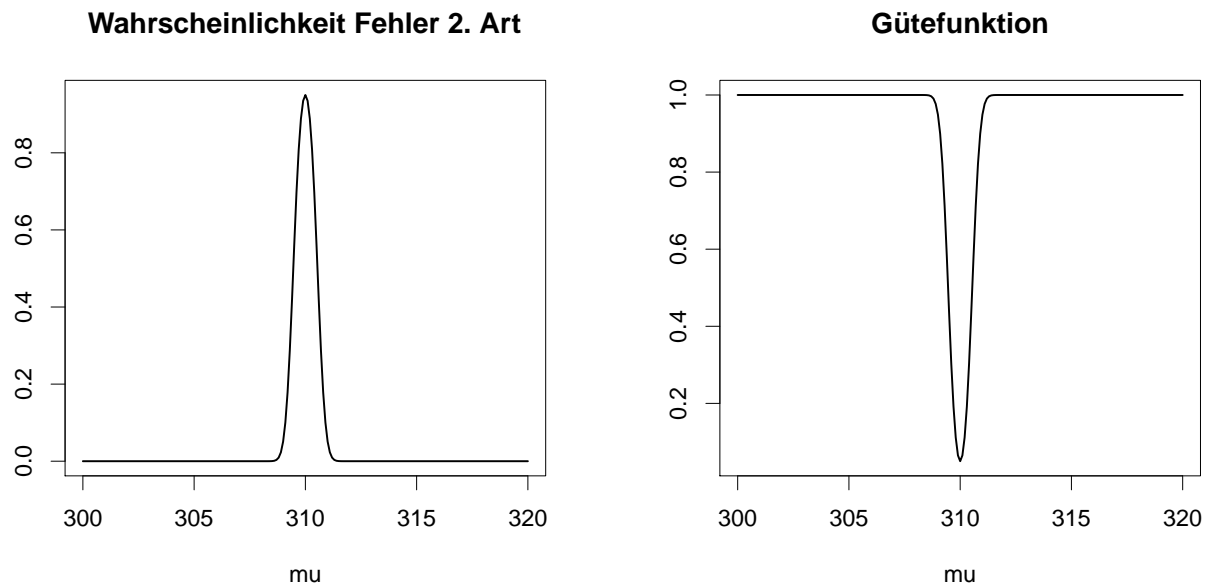
```
> ts<-numeric(1000)
> for (i in (1:1000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,300,30)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> sum(ts<=qt(0.975,df=14))/1000
[1] 0.78
```

Aufgabe 1 (h)

Die Gütefunktion ist 1-Fehlerwahrscheinlichkeit 2.Art.

```
mu<-seq(300,320,0.1)
ncp<-sqrt(15)*(mu-310)
plot(mu,pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      -pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mu,1-pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      +pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      ,type="l",ylab="",main="Gütefunktion")
```

Aufgabe 1 (h)



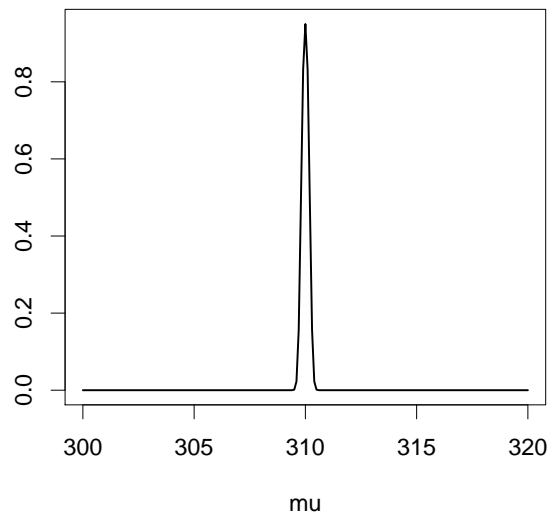
Aufgabe 1 (i)

$$N = 100$$

```
mu<-seq(300,320,0.1)
ncp<-sqrt(100)*(mu-310)
plot(mu,pt(qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp)
      -pt(-qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mu,1-pt(qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp)
      +pt(-qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",main="Gütefunktion")
```


Aufgabe 1 (i)

Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art



Gütefunktion

