

W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

Übung 11

Aufgabe 1

Ein Fahrzeugpark enthält **6 Fahrzeuge**.

Jedes Fahrzeug hat die Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ (bzw. $p = 0.3$), dass es kaputt geht.

Pro Tag kann nur ein Fahrzeug repariert werden.

Wieviele Autos am Ende eines Tages kaputt sind, hängt nur davon ab, wieviele Autos am Vortag kaputt waren: Markov-Eigenschaft.

Aufgabe 1 : Erläuterung der Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist eine stochastische Matrix \mathfrak{P} mit

$$\mathfrak{P} = (p_{i,j})_{i,j \in I}.$$

Ihre Elemente geben die WKeiten an, dass der Prozess X_t in einem Zeitschritt (Tag) zum Zustand i wechselt, wenn er vorab im Zustand j ist. D.h.

$$i \begin{matrix} & j \\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] & \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 6] \\ \mathbb{P}[X_{t+1} = 1 | X_t = 0] & . & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 1 | X_t = 6] \\ & & . & & & \\ & \dots & & . & & \\ & & & & . & \\ \mathbb{P}[X_{t+1} = 6 | X_t = 0] & . & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 6 | X_t = 6] \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Aufgabe 1 : Übergangsmatrix $p=0.1$

Die Übergangsmatrix lässt sich jeweils wie in Beispiel 18.0.10 bestimmen, mithilfe von `UeMatFahrzeuge` berechnen wir, zunächst für $p = 0.1$:

```
> UeMatFahrzeuge(0.1)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.531441	0.531441	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.354294	0.354294	0.59049	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.098415	0.098415	0.32805	0.6561	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.014580	0.014580	0.07290	0.2916	0.729	0.00	0.0
[5,]	0.001215	0.001215	0.00810	0.0486	0.243	0.81	0.0
[6,]	0.000054	0.000054	0.00045	0.0036	0.027	0.18	0.9
[7,]	0.000001	0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1

Aufgabe 1 : Übergangsmatrix $p=0.3$

```
> UeMatFahrzeuge(0.3)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.117649	0.117649	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.302526	0.302526	0.16807	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.324135	0.324135	0.36015	0.2401	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.185220	0.185220	0.30870	0.4116	0.343	0.00	0.0
[5,]	0.059535	0.059535	0.13230	0.2646	0.441	0.49	0.0
[6,]	0.010206	0.010206	0.02835	0.0756	0.189	0.42	0.7
[7,]	0.000729	0.000729	0.00243	0.0081	0.027	0.09	0.3

Aufgabe 1 (a) : Simulation der Markovkette

Mithilfe der Übergangsmatrizen können die Markovketten simuliert werden, da diese für alle Zustände die Wahrscheinlichkeiten des Übergangs in einem Schritt enthält. Benutze dazu die Funktion `MarkovKette`:

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.1),N=20,start=1)
$Markovkette
[1] 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 2 1 2 2 1 1 1 2
```

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.3),N=20,start=1)
$Markovkette
[1] 0 2 2 3 6 6 5 4 5 5 5 4 4 4 4 3 4 3 5 5 5
```

Aufgabe 1 (b) : Invariante Verteilung

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$

Aufgabe 1 (b) : Invariante Verteilung

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von $\pi = P\pi$, also Bestimmung eines Eigenvektors von P zum Eigenwert 1, der nur positive Eigenwerte hat

Aufgabe 1 (b) : Invariante Verteilung

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von $\pi = P\pi$, also Bestimmung eines Eigenvektors von P zum Eigenwert 1, der nur positive Eigenwerte hat
- oder durch Simulation, in dem in einer sehr langen Markovkette (hier $N = 1000$) gezählt wird, wie oft die einzelnen Zustände angenommen wurden

Aufgabe 1 (b) : Invariante Verteilung

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangsmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von $\pi = P\pi$, also Bestimmung eines Eigenvektors von P zum Eigenwert 1, der nur positive Eigenwerte hat
- oder durch Simulation, in dem in einer sehr langen Markovkette (hier $N = 1000$) gezählt wird, wie oft die einzelnen Zustände angenommen wurden

Benutze die Funktion `InvariantesP`

Aufgabe 1 (b) : Lösung in R, $p=0.1$

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.1),M=100,N=1000)
```

```
Anzahl der Durchlaeufer bis Abbruch: 13
```

```
$Approximiert
```

0	1	2	3	4
4.233084e-01	3.747867e-01	1.559282e-01	3.924438e-02	6.163545e-03
5	6			
5.483200e-04	2.044907e-05			

```
$Exakt
```

0	1	2	3	4
4.252059e-01	3.748940e-01	1.548264e-01	3.855166e-02	5.977630e-03
5	6			
5.249881e-04	1.936782e-05			

```
$Simuliert
```

0	1	2	3	4	5
0.454	0.345	0.146	0.042	0.013	0.001

Aufgabe 1 (b) : Lösung in R, $p=0.3$

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.3),M=100,N=1000)
```

```
Anzahl der Durchlaeufer bis Abbruch: 8
```

```
$Approximiert
```

0	1	2	3	4
0.004487423	0.032285472	0.121725455	0.269837214	0.332188358
5	6			
0.198041882	0.041434197			

```
$Exakt
```

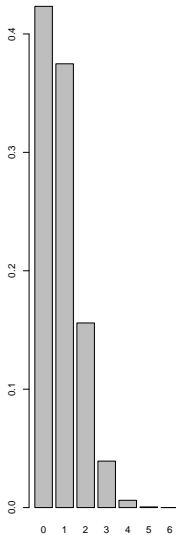
0	1	2	3	4	5
0.00402231	0.03016676	0.11794895	0.26817058	0.33541759	0.2018375
6					
0.04243625					

```
$Simuliert
```

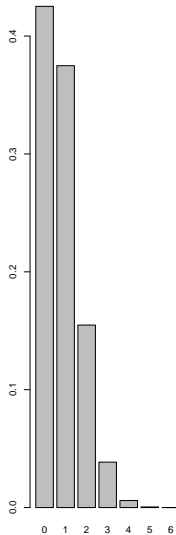
0	1	2	3	4	5	6
0.009	0.036	0.143	0.268	0.322	0.188	0.035

Aufgabe 1 : Histogramme von π , $p = 0.1$

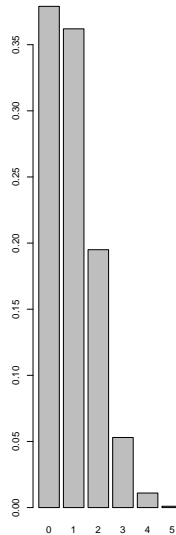
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung

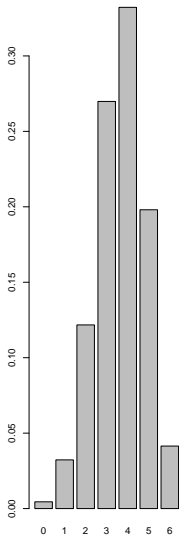


Simulierte invariante Verteilung

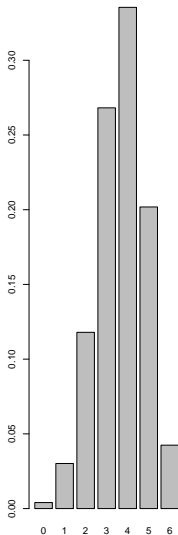


Aufgabe 1 : Histogramme von π , $p = 0.3$

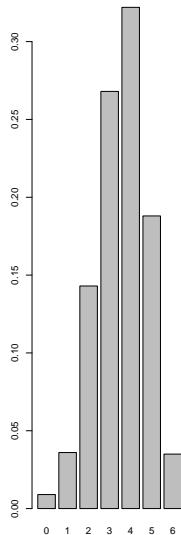
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung



Simulierte invariante Verteilung



Aufgabe 1 (c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

- Nutze die invariante Verteilung

Aufgabe 1 (c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

- Nutze die invariante Verteilung
- Für $p = 0.1$:

$$\pi_6 \approx 0$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

- Nutze die invariante Verteilung
- Für $p = 0.1$:

$$\pi_6 \approx 0$$

- Für $p = 0.3$:

$$\pi_6 \approx 0.035$$

Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

- Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung

Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

- Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung
- Für $p = 0.1$:

$$\begin{aligned} &0.4252 \cdot 0 + 0.37489 \cdot 1 + 0.1548 \cdot 2 + 0.0385 \cdot 3 \\ &+ 0.006 \cdot 40.000525 \cdot 50.00002 \cdot 6 \\ &= 0.827 \end{aligned}$$

Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

- Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung
- Für $p = 0.1$:

$$\begin{aligned} &0.4252 \cdot 0 + 0.37489 \cdot 1 + 0.1548 \cdot 2 + 0.0385 \cdot 3 \\ &+ 0.006 \cdot 40.000525 \cdot 50.00002 \cdot 6 \\ &= 0.827 \end{aligned}$$

- Für $p = 0.3$:

$$\begin{aligned} &0.00402231 \cdot 0 + 0.03016676 \cdot 1 + 0.11794895 \cdot 2 + 0.26817058 \cdot 3 \\ &+ 0.33541759 \cdot 4 + 0.20183756 \cdot 5 + 0.04243625 \cdot 6 \\ &= 3.676 \end{aligned}$$

Wie stark streut die erwartete Anzahl?

- Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung

Aufgabe 1 (d)

Wie stark streut die erwartete Anzahl?

- Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung
- Für $p = 0.1$:

0.8790

Wie stark streut die erwartete Anzahl?

- Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung

- Für $p = 0.1$:

0.8790

- Für $p = 0.3$:

1.1586

Aufgabe 2

Im Lager ist Platz für $m = 3$ Waschmaschinen.

Pro Woche gibt es Y_n Kaufanfragen.

Sind am Ende der Woche weniger als $k = 2$ Waschmaschinen im Lager (also eine oder keine), dann wird das Lager wieder aufgefüllt, sonst nicht.

Aufgabe 2 : Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

- Bei Spalten 1 und 2 wird nachbestellt, daher WKeiten ausgehend von WKeiten der Anfragen bei 3 Maschinen im Lager

Aufgabe 2 : Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

- Bei Spalten 1 und 2 wird nachbestellt, daher WKeiten ausgehend von WKeiten der Anfragen bei 3 Maschinen im Lager
- Bei Spalte 3 wird nicht nachgefüllt. Also WKeiten basieren auf WKeiten der Anfragen bei 2 Maschinen im Lager

Aufgabe 2 : Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

- Bei Spalten 1 und 2 wird nachbestellt, daher WKeiten ausgehend von WKeiten der Anfragen bei 3 Maschinen im Lager
- Bei Spalte 3 wird nicht nachgefüllt. Also WKeiten basieren auf WKeiten der Anfragen bei 2 Maschinen im Lager
- Bei Spalte 3 volles Lager, also analog zu Spalten 1 und 2

Aufgabe 2 : Invariante Verteilung

Welche der folgenden Verteilungen nähert die invariante Verteilung $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ der Markovkette am besten an?

$$\begin{aligned}\pi^1 &= (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T, \pi^2 = (0.55, 0.58, 0.53, 0.28)^T, \\ \pi^3 &= (0.15, 0.30, 0.27, 0.28)^T, \pi^4 = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)^T, \\ \pi^5 &= (0.28, 0.30, 0.27, 0.15)^T, \pi^6 = (0.28, 0.30, 0.15, 0.27)^T\end{aligned}$$

(dabei ist π_i die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende der Woche i Waschmaschinen im Lager sind).

Aufgabe 2 : Invariante Verteilung

Bestimme dazu

$$P\pi$$

und **überprüfe, ob $P\pi = \pi$ und zusätzlich, ob die Summe der Einträge von π gleich 1 ist (!).**

Benutze dieses π , um Erwartungswert und Streuung zu bestimmen.

Aufgabe 2 : Invariante Verteilung - Berechnung

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi_5,$$

$$P\pi_6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen π^2 und π^5 in Frage.

Aufgabe 2 : Invariante Verteilung - Berechnung

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi^5,$$

$$P\pi^6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen π^2 und π^5 in Frage.

Summe der Einträge von π^2 ist 1.94 \Rightarrow keine Verteilung.

Summe der Einträge von π^5 ist 1, damit wird die invariante Verteilung approximiert durch π^5 .

Aufgabe 2 : Beantwortung der Fragen (a)

Da die invariante Verteilung gegeben ist durch

$\pi^5 = (0.28, 0.3, 0.27, 0.15)$ können wir die Fragen beantworten.

- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass keine Waschmaschine auf Lager ist : 0.28
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine auf Lager ist: 0.3
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass zwei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.27
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass drei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.15

Aufgabe 2 : Beantwortung der Fragen (b)

Berechne damit die erwartete mittlere Anzahl von Waschmaschinen auf Lager:

$$0 \cdot 0.28 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.27 + 3 \cdot 0.15 = 1.29$$

und die mittlere Streuung:

$$\sqrt{0^2 \cdot 0.28 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.27 + 3^2 \cdot 0.15 - 1.29^2} = 1.03.$$

Aufgabe 2 : Alt. Bestimmung der invarianten Verteilung

Simuliere die Markovkette, wieder mithilfe von MarkovKette:

```
> MarkovKette(UeMat,N=10,start=4)
$Markovkette
 [1] 3 2 1 2 0 2 2 1 1 2 0
```

Bestimme die invariante Verteilung durch Simulation:

```
> N<-100000
> r<-table(MarkovKette(UeMat,N))/N
> #invariante Verteilung
> r
```

0	1	2	3
0.28127	0.30206	0.27318	0.14350