

# Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften

## Übung 10

### Aufgabe 1, Dreiecksverteilung

$f$  sei die Dichte der Dreiecksverteilung über  $[0, 2]$ ,  $f$  hat Dreiecksgestalt.

Da  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Außerhalb von  $[0, 2]$  ist  $f(x) = 0$ , sonst Dreieck über  $[0, 2]$ , also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{Fläche unter dem Graphen} = \frac{1}{2} \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = 1.$$

Nehmen wir an, dass das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist die Länge der Grundseite 2 und die Höhe muss 1 sein.

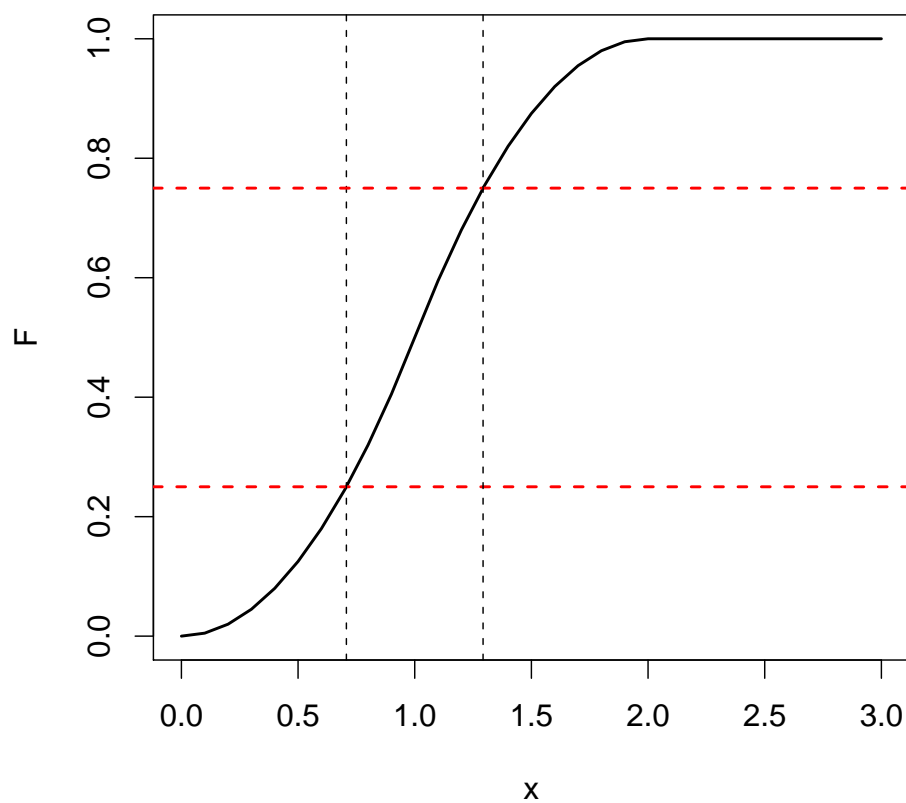
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

## Aufgabe 1- Fortsetzung

- ▶ Verteilungsfunktion:  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
- ▶ Erwartungswert:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$
- ▶ Varianz:  $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t)dt$
- ▶  $Q_{0,25}(X)$  ist der kleinste Wert  $x$  sodass  $F(x) \geq 0,25$
- ▶  $Q_{0,75}(X)$  ist der kleinste Wert  $x$  sodass  $F(x) \geq 0,75$

- ▶  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$
- ▶  $E(X) = 1$
- ▶  $Var(X) = \frac{1}{6}$
- ▶  $Q_{0,25} = \sqrt{\frac{1}{2}}, Q_{0,75} = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}$

## Aufgabe 1- Fortsetzung



## Aufgabe 1- Zusatz: Rechnungen

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x t dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x (-t + 2) dt, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2 - 4x}{2} - \frac{3}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

$P(X = i, Y = j)$		$Y$			$P(X = i)$
		1	2	3	
$X$	1	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{20}$
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$
$P(Y = j)$		$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	

## Aufgabe 2

- ▶  $E(X) = \frac{61}{20} = 3,05$
- ▶  $E(Y) = \frac{37}{20} = 1,85$
- ▶  $Var(X) = \frac{339}{400} = 0,8475$
- ▶  $Var(Y) = \frac{251}{400} = 0,6275$
- ▶  $Kov(X, Y) = \frac{123}{400} = 0,3075$
- ▶  $Korr(X, Y) = \frac{123}{\sqrt{339 \cdot 251}} = 0,422$