

Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften

Übung 9

Aufgabe 1 a): Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien B_1, \dots, B_n eine Zerlegung des Grundraums Ω , d.h.
 B_1, \dots, B_n sind paarweise disjunkt (keine gemeinsamen Punkte)
und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Ferner gelte $P(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Aufgabe 1 b): Formel von Bayes

Seien B_1, \dots, B_n eine Zerlegung des Grundraums Ω , d.h. B_1, \dots, B_n sind paarweise disjunkt (keine gemeinsamen Punkte) und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Ferner gelte $P(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $P(A) > 0$. Dann gilt:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit(A und B)}}{\text{Wahrscheinlichkeit (B)}}$$

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0		0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$		$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		0.4
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	0.4
$P(Y = j)$					

Aufgabe 3

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	0.05
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.25
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0.3
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	0.4
$P(Y = j)$		$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{4}$	

$$\begin{aligned} & P(T_1 + T_2 \leq 1) \\ = & P(T_1 + T_2 = 0) + P(T_1 + T_2 = 1) \\ = & \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0} + \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} \\ = & 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,75 \end{aligned}$$

in R: `pbinom(1,2,0.5)`

$$\begin{aligned} & P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \leq 2) \\ = & P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0) + P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1) \\ & + P(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2) \\ = & \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-0} + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-1} \\ & + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} \\ = & 0,6875 \end{aligned}$$

in R: `pbinom(2,4,0.5)`

Frohe Feiertage und einen guten
Rutsch ins neue Jahr!