

# W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

## Übung 11

# Aufgabe 1

Ein Fahrzeugpark enthält **6 Fahrzeuge**.

Jedes Fahrzeug hat die Wahrscheinlichkeit  $p = 0.1$  (bzw.  $p = 0.3$ ), dass es kaputt geht.

Pro Tag kann nur ein Fahrzeug repariert werden.

Wieviele Autos am Ende eines Tages kaputt sind, hängt nur davon ab, wieviele Autos am Vortag kaputt waren: Markov-Eigenschaft.

# Aufgabe 1 : Erläuterung der Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist eine **stochastische** Matrix

$$\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I} = (\mathbb{P}[X_{t+1} = i | X_t = j])_{ij}.$$

Stochastisch bezeichnet dabei, dass die Eintrege nicht negativ sind, und die Zeilensummen stets 1 ergeben.

Ihre Elemente geben die WKeiten an, dass eine homogene Markov-Kette  $X_t$  in einem Zeitschritt zum Zustand  $i$  wechselt, wenn sie vorab im Zustand  $j$  war. D.h.

$$\begin{matrix} & j \\ i & \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 0] & \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 1] & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 0 | X_t = 6] \\ \mathbb{P}[X_{t+1} = 1 | X_t = 0] & . & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 1 | X_t = 6] \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \mathbb{P}[X_{t+1} = 6 | X_t = 0] & . & . & . & . & \mathbb{P}[X_{t+1} = 6 | X_t = 6] \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## Aufgabe 1 : Übergangsmatrix $p=0.1$

Die Übergangsmatrix lässt sich jeweils wie in Beispiel 18.0.10 bestimmen, mithilfe von `UeMatFahrzeuge` berechnen wir, zunächst für  $p = 0.1$ :

```
> UeMatFahrzeuge(0.1)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.531441	0.531441	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.354294	0.354294	0.59049	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.098415	0.098415	0.32805	0.6561	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.014580	0.014580	0.07290	0.2916	0.729	0.00	0.0
[5,]	0.001215	0.001215	0.00810	0.0486	0.243	0.81	0.0
[6,]	0.000054	0.000054	0.00045	0.0036	0.027	0.18	0.9
[7,]	0.000001	0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1

## Aufgabe 1 : Übergangsmatrix $p=0.3$

```
> UeMatFahrzeuge(0.3)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.117649	0.117649	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.302526	0.302526	0.16807	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.324135	0.324135	0.36015	0.2401	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.185220	0.185220	0.30870	0.4116	0.343	0.00	0.0
[5,]	0.059535	0.059535	0.13230	0.2646	0.441	0.49	0.0
[6,]	0.010206	0.010206	0.02835	0.0756	0.189	0.42	0.7
[7,]	0.000729	0.000729	0.00243	0.0081	0.027	0.09	0.3

## Aufgabe 1 (a) : Simulation der Markovkette

Mithilfe der Übergangsmatrizen können die Markovketten simuliert werden, da diese für alle Zustände die Wahrscheinlichkeiten des Übergangs in einem Schritt enthält. Benutze dazu die Funktion `MarkovKette`:

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.1),N=20,start=1)
$Markovkette
[1] 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 2 1 2 2 1 1 1 2
```

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.3),N=20,start=1)
$Markovkette
[1] 0 2 2 3 6 6 5 4 5 5 5 4 4 4 4 3 4 3 5 5 5
```

## Aufgabe 1 (b) : Invariante Verteilung

Bestimme die **invariante Verteilung**  $\pi$  sodass  $\pi = \mathcal{P}\pi$ , wobei  $\mathcal{P}$  die Übergangsmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem  $\mathcal{P}^M p_n$  berechnet wird für großes  $M$  (hier  $M = 100$ ) und  $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von  $\pi = \mathcal{P}\pi$ , also Bestimmung eines Eigenvektors von  $\mathcal{P}$  zum Eigenwert 1, der nur positive Einträge hat und normiert ist
- durch Simulation, indem in einer sehr langen Markovkette (hier  $N = 1000$ ) gezählt wird, wie oft die einzelnen Zustände angenommen wurden

Benutze dazu die Funktion `InvariantesP`

## Aufgabe 1 (b) : Lösung in R, $p=0.1$

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.1),M=100,N=1000)
```

```
Anzahl der Durchlaeuft bis Abbruch: 13
```

```
$Approximiert
```

0	1	2	3
4.233084e-01	3.747867e-01	1.559282e-01	3.924438e-02
4	5	6	
6.163545e-03	5.483200e-04	2.044907e-05	

```
$Exakt
```

0	1	2	3
4.252059e-01	3.748940e-01	1.548264e-01	3.855166e-02
4	5	6	
5.977630e-03	5.249881e-04	1.936782e-05	

```
$Simuliert
```

0	1	2	3	4	5	6
0.454	0.345	0.146	0.042	0.013	0.001	0.000



## Aufgabe 1 (b) : Lösung in R, $p=0.3$

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.3),M=100,N=1000)
```

```
Anzahl der Durchlaeufer bis Abbruch: 8
```

```
$Approximiert
```

0	1	2	3
0.004487423	0.032285472	0.121725455	0.269837214
4	5	6	
0.332188358	0.198041882	0.041434197	

```
$Exakt
```

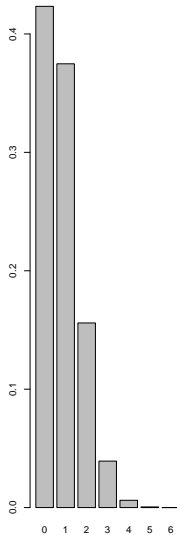
0	1	2	3
0.00402231	0.03016676	0.11794895	0.26817058
4	5	6	
0.33541759	0.20183756	0.04243625	

```
$Simuliert
```

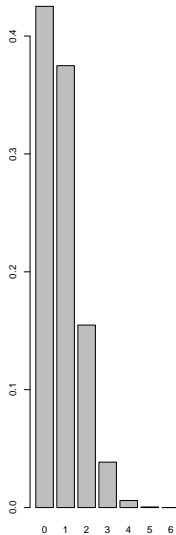
0	1	2	3	4	5	6
0.009	0.036	0.143	0.268	0.322	0.188	0.035

# Aufgabe 1 : Histogramme von $\pi$ , $p = 0.1$

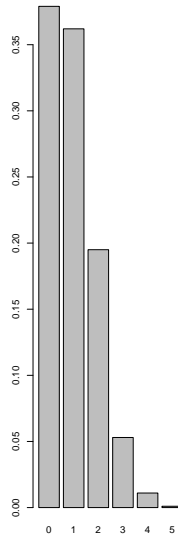
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung

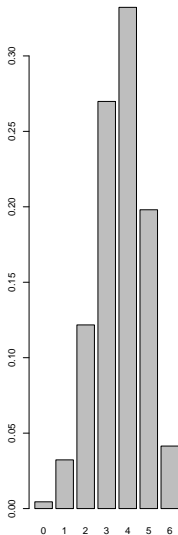


Simulierte invariante Verteilung

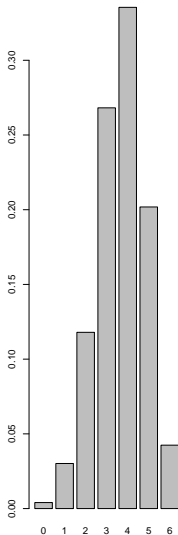


# Aufgabe 1 : Histogramme von $\pi$ , $p = 0.3$

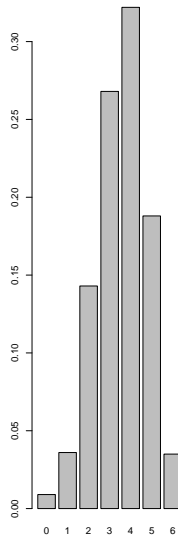
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung



Simulierte invariante Verteilung



# Aufgabe 1 (c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

- Nutze die invariante Verteilung
- Für  $p = 0.1$ :

$$\pi_6 \approx 0$$

- Für  $p = 0.3$ :

$$\pi_6 \approx 0.042$$

## Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

- Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung
- Für  $p = 0.1$ :

$$\begin{aligned} &0.4252 \cdot 0 + 0.37489 \cdot 1 + 0.1548 \cdot 2 + 0.0386 \cdot 3 \\ &+ 0.006 \cdot 4 + 0.0005 \cdot 5 + 0.00002 \cdot 6 \\ &\approx 0.827 \end{aligned}$$

- Für  $p = 0.3$ :

$$\begin{aligned} &0.0040 \cdot 0 + 0.0302 \cdot 1 + 0.1179 \cdot 2 + 0.2682 \cdot 3 \\ &+ 0.3354 \cdot 4 + 0.2018 \cdot 5 + 0.0424 \cdot 6 \\ &\approx 3.676 \end{aligned}$$

Wie stark streut die erwartete Anzahl?

- Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung

- Für  $p = 0.1$ :

0.8758

- Für  $p = 0.3$ :

1.1586

## Aufgabe 2

Im Lager ist Platz für  $m = 3$  Waschmaschinen.

Pro Woche gibt es  $Y_n$  Kaufanfragen. Die Verteilung von  $Y_n$  ist gegeben durch:

$$\mathbb{P}[Y_n = 0] = 0.2$$

$$\mathbb{P}[Y_n = 1] = 0.3$$

$$\mathbb{P}[Y_n = 2] = 0.3$$

$$\mathbb{P}[Y_n \geq 3] = 0.2$$

Sind am Ende der Woche weniger als  $k = 2$  Waschmaschinen im Lager (also eine oder keine), dann wird das Lager wieder aufgefüllt, sonst nicht.

## Aufgabe 2 : Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung:

- Bei Spalten 1 und 2 wird nachbestellt, daher ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten direkt aus der Verteilung von  $Y_n$ , da man von einem vollen Lager ausgehen kann
- Bei Spalte 3 wird nicht nachgefüllt. Also Wahrscheinlichkeiten basieren auf den Anfragen bei und 2 Maschinen im Lager
- Bei Spalte 4 ist das Lager wie in den Spalten 1 und 2 komplett gefüllt, daher sind die Wahrscheinlichkeiten die selben



## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung

Welche der folgenden Verteilungen nähert die invariante Verteilung  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$  der Markovkette am besten an?

$$\pi^1 = (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T$$

$$\pi^2 = (0.55, 0.58, 0.53, 0.28)^T$$

$$\pi^3 = (0.15, 0.30, 0.27, 0.28)^T$$

$$\pi^4 = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)^T$$

$$\pi^5 = (0.28, 0.30, 0.27, 0.15)^T$$

$$\pi^6 = (0.28, 0.30, 0.15, 0.27)^T$$

(dabei ist  $\pi_i$  die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende der Woche  $i$  Waschmaschinen im Lager sind).

## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung

Bestimme dazu

$$P\pi$$

und überprüfe, ob  $P\pi = \pi$  und zusätzlich, ob die Summe der Einträge von  $\pi$  gleich 1 ist.

## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung - Berechnung

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi^5,$$

$$P\pi_6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen  $\pi^2$  und  $\pi^5$  in Frage.

## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung - Berechnung

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi^5,$$

$$P\pi_6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen  $\pi^2$  und  $\pi^5$  in Frage.

Summe der Einträge von  $\pi^2$  ist 1.94  $\Rightarrow$  keine Verteilung.

Summe der Einträge von  $\pi^5$  ist 1

$\Rightarrow$  die invariante Verteilung wird durch  $\pi^5$  approximiert

## Aufgabe 2 : Beantwortung der Fragen (a)

Da die invariante Verteilung gegeben ist durch

$\pi^5 = (0.28, 0.30, 0.27, 0.15)^T$  können wir die Fragen beantworten.

- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass keine Waschmaschine auf Lager ist : 0.28
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine auf Lager ist: 0.3
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass zwei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.27
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass drei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.15

## Aufgabe 2 : Beantwortung der Fragen (b)

Berechne damit die erwartete mittlere Anzahl von Waschmaschinen auf Lager:

$$0 \cdot 0.28 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.27 + 3 \cdot 0.15 = 1.29$$

und die mittlere Streuung:

$$\sqrt{0^2 \cdot 0.28 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.27 + 3^2 \cdot 0.15 - 1.29^2} = 1.03.$$

## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung durch Simulation

Simuliere die Markovkette, wieder mithilfe von MarkovKette:

```
> MarkovKette(UeMat,N=10,start=4)
$Markovkette
[1] 3 2 1 2 0 2 2 1 1 2 0
```

Bestimme die invariante Verteilung durch Simulation:

```
> N<-100000
> r<-table(MarkovKette(UeMat,N))/N
> #invariante Verteilung
> r
```

0	1	2	3
0.28127	0.30206	0.27318	0.14350

## Aufgabe 2 : Invariante Verteilung durch Potenzieren

Berechne  $\mathcal{P}^M$ , hier  $M=100$ :

```
UePot<-UeMat
```

```
for (i in 2:100) UePot=UePot%*%UeMat
```

Bestimme die invariante Verteilung durch die Multiplikation mit  $p_n = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ , wobei hier  $k=4$  ist.

```
pn<-c(1/4,1/4,1/4,1/4)
```

```
pi<-UePot%*%pn
```

```
pi
```

```
[,1]
```

```
[1,] 0.2818182
```

```
[2,] 0.3000000
```

```
[3,] 0.2727273
```

```
[4,] 0.1454545
```