

Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften

Übung 11

Aufgabe 1

Ein Fahrzeugpark enthält **6 Fahrzeuge**.

Jedes Fahrzeug hat die Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ (bzw. $p = 0.3$), dass es kaputt geht.

Pro Tag kann nur ein Fahrzeug repariert werden.

Wieviele Autos am Ende eines Tages kaputt sind, hängt nur davon ab, wieviele Autos am Vortag kaputt waren: Markov-Eigenschaft.

Aufgabe 1

Die Übergangsmatrix lässt sich jeweils wie in Beispiel 18.0.10 bestimmen, mithilfe von `UeMatFahrzeuge` berechnen wir, zunächst für $p = 0.1$:

```
> UeMatFahrzeuge(0.1)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.531441	0.531441	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.354294	0.354294	0.59049	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.098415	0.098415	0.32805	0.6561	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.014580	0.014580	0.07290	0.2916	0.729	0.00	0.0
[5,]	0.001215	0.001215	0.00810	0.0486	0.243	0.81	0.0
[6,]	0.000054	0.000054	0.00045	0.0036	0.027	0.18	0.9
[7,]	0.000001	0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1

und genauso für $p = 0.3$

```
> UeMatFahrzeuge(0.3)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.117649	0.117649	0.00000	0.0000	0.000	0.00	0.0
[2,]	0.302526	0.302526	0.16807	0.0000	0.000	0.00	0.0
[3,]	0.324135	0.324135	0.36015	0.2401	0.000	0.00	0.0
[4,]	0.185220	0.185220	0.30870	0.4116	0.343	0.00	0.0
[5,]	0.059535	0.059535	0.13230	0.2646	0.441	0.49	0.0
[6,]	0.010206	0.010206	0.02835	0.0756	0.189	0.42	0.7
[7,]	0.000729	0.000729	0.00243	0.0081	0.027	0.09	0.3

Aufgabe 1 (a)

Mithilfe der Übergangsmatrizen können die Markovketten simuliert werden.

Benutze dazu die Funktion MarkovKette:

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.1),N=20,start=1)
```

```
$Markovkette
```

```
[1] 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 2 1 2 2 1 1 1 2
```

```
> MarkovKette(UeMatFahrzeuge(0.3),N=20,start=1)
```

```
$Markovkette
```

```
[1] 0 2 2 3 6 6 5 4 5 5 5 4 4 4 4 3 4 3 5 5 5
```

Aufgabe 1 (b)

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$

Aufgabe 1 (b)

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von $\pi = P\pi$, also Bestimmung eines Eigenvektors von P zum Eigenwert 1, der nur positive Eigenwerte hat

Aufgabe 1 (b)

Bestimme die **invariante Verteilung** π sodass $\pi = P\pi$, wobei P die Übergangmatrix ist, entweder

- durch Approximation, indem $P^M p_n$ berechnet wird für großes M (hier $M = 100$) und $p_n = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$
- exakt, durch Lösung von $\pi = P\pi$, also Bestimmung eines Eigenvektors von P zum Eigenwert 1, der nur positive Eigenwerte hat
- oder durch Simulation, in dem in einer sehr langen Markovkette (hier $N = 1000$) gezählt wird, wie oft die einzelnen Zustände angenommen wurden

Aufgabe 1 (b)

Benutze die Funktion InvariantesP:

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.1),M=100,N=1000)
```

Anzahl der Durchläufe bis Abbruch: 13

\$Approximiert

0	1	2	3	4
4.233084e-01	3.747867e-01	1.559282e-01	3.924438e-02	6.163545e-03
5	6			
5.483200e-04	2.044907e-05			

\$Exakt

0	1	2	3	4
4.252059e-01	3.748940e-01	1.548264e-01	3.855166e-02	5.977630e-03
5	6			
5.249881e-04	1.936782e-05			

\$Simuliert

0	1	2	3	4	5
0.454	0.345	0.146	0.042	0.013	0.001

Aufgabe 1 (b)

Für $p = 0.3$

```
> InvariantesP(UeMatFahrzeuge(0.3),M=100,N=1000)
```

Anzahl der Durchläufe bis Abbruch: 8

\$Approximiert

0	1	2	3	4
0.004487423	0.032285472	0.121725455	0.269837214	0.332188358
5	6			
0.198041882	0.041434197			

\$Exakt

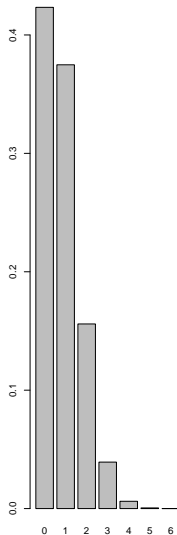
0	1	2	3	4	5
0.00402231	0.03016676	0.11794895	0.26817058	0.33541759	0.2018375
6					
0.04243625					

\$Simuliert

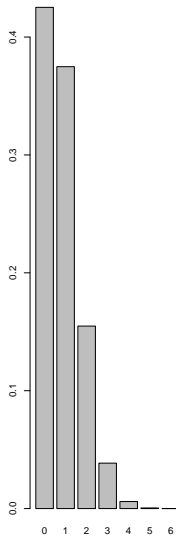
0	1	2	3	4	5	6
0.009	0.036	0.143	0.268	0.322	0.188	0.035

$$p = 0.1$$

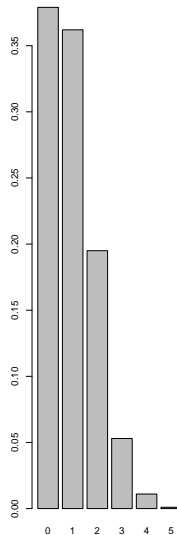
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung

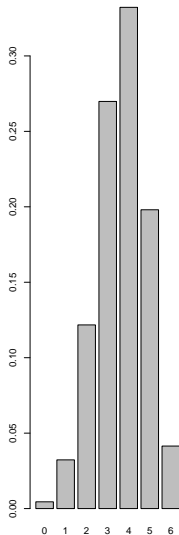


Simulierte invariante Verteilung

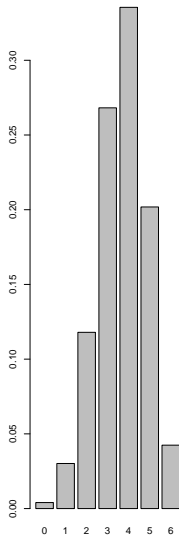


$$p = 0.3$$

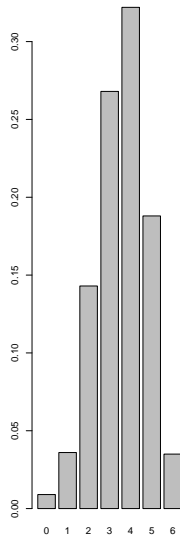
Approx. invariante Verteilung



Invariante Verteilung



Simulierte invariante Verteilung



Aufgabe 1 (c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

Aufgabe 1 (c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag alle Fahrzeuge kaputt sind?

π_6 : Für $p = 0.1$ gilt $\pi_6 \approx 0$ und für $p = 0.3$ $\pi_6 \approx 0.035$

Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung:

- Für $p = 0.1$: $0.4252 \cdot 0 + 0.37489 \cdot 1 + 0.1548 \cdot 2 + 0.0385 \cdot 3 + 0.006 \cdot 40.000525 \cdot 50.00002 \cdot 6 = 0.827$

Aufgabe 1 (d)

Wie groß ist die erwartete Anzahl kaputter Fahrzeuge pro Tag?

Bestimme den Erwartungswert der invarianten Verteilung:

- Für $p = 0.1$: $0.4252 \cdot 0 + 0.37489 \cdot 1 + 0.1548 \cdot 2 + 0.0385 \cdot 3 + 0.006 \cdot 40.000525 \cdot 50.00002 \cdot 6 = 0.827$
- Für $p = 0.3$:
 $0.00402231 \cdot 0 + 0.03016676 \cdot 1 + 0.11794895 \cdot 2 + 0.26817058 \cdot 3 + 0.33541759 \cdot 4 + 0.20183756 \cdot 5 + 0.04243625 \cdot 6 = 3.676$

Aufgabe 1 (d)

Wie stark streut die erwartete Anzahl? Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung:

- Für $p = 0.1$: 0.8790

Wie stark streut die erwartete Anzahl? Bestimme dazu die Wurzel aus der Varianz der invarianten Verteilung:

- Für $p = 0.1$: 0.8790
- Für $p = 0.3$: 1.1586

Aufgabe 2

Im Lager ist Platz für $m = 3$ Waschmaschinen.

Pro Woche gibt es Y_n Kaufanfragen.

Sind am Ende der Woche weniger als $k = 2$ Waschmaschinen im Lager (also eine oder keine), dann wird das Lager wieder aufgefüllt, sonst nicht.

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Verteilungen nähert die invariante Verteilung $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ der Markovkette am besten an?

$$\begin{aligned}\pi^1 &= (0.2, 0.3, 0.3, 0.2)^T, \pi^2 = (0.55, 0.58, 0.53, 0.28)^T, \\ \pi^3 &= (0.15, 0.30, 0.27, 0.28)^T, \pi^4 = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)^T, \\ \pi^5 &= (0.28, 0.30, 0.27, 0.15)^T, \pi^6 = (0.28, 0.30, 0.15, 0.27)^T\end{aligned}$$

(dabei ist π_i die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende der Woche i Waschmaschinen im Lager sind).

Bestimme dazu

$$P\pi$$

und überprüfe, ob $P\pi = \pi$ und zusätzlich, ob die Summe der Einträge von π gleich 1 ist (!).

Benutze dieses π , um Erwartungswert und Streuung zu bestimmen.

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi_5,$$

$$P\pi_6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen π^2 und π^5 in Frage.

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$P\pi^1 = (0.29, 0.3, 0.27, 0.14)^T \neq \pi^1,$$

$$P\pi^2 = (0.547, 0.582, 0.529, 0.282)^T \approx \pi^2,$$

$$P\pi^3 = (0.281, 0.3, 0.273, 0.146)^T \neq \pi^3,$$

$$P\pi^4 = (0.26, 0.30, 0.28, 0.16)^T \neq \pi^4,$$

$$P\pi^5 = (0.281, 0.300, 0.273, 0.146)^T \approx \pi^5,$$

$$P\pi_6 = (0.245, 0.300, 0.285, 0.170)^T \neq \pi^6$$

Also kommen π^2 und π^5 in Frage.

Aber Summe der Einträge von π^2 ist 1.94, Summe der Einträge von π^5 ist 1, damit ist die invariante Verteilung gegeben durch π^5 .

Invariante Verteilung gegeben durch $\pi^5 = (0.28, 0.3, 0.27, 0.15)$ bedeutet:

- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass keine Waschmaschine auf Lager ist : 0.28
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine auf Lager ist: 0.3
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass zwei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.27
- Mittlere Wahrscheinlichkeit, dass drei Waschmaschinen auf Lager sind: 0.15

Berechne damit die erwartete mittlere Anzahl von Waschmaschinen auf Lager:

$$0 \cdot 0.28 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.27 + 3 \cdot 0.15 = 1.29$$

und die mittlere Streuung:

$$\sqrt{0^2 \cdot 0.28 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.27 + 3^2 \cdot 0.15 - 1.29^2} = 1.03.$$

alternative Bestimmung der invarianten Verteilung

Simuliere die Markovkette, wieder mithilfe von MarkovKette:

```
> MarkovKette(UeMat,N=10,start=4)
$Markovkette
[1] 3 2 1 2 0 2 2 1 1 2 0
```

Bestimme die invariante Verteilung durch Simulation:

```
> N<-100000
> r<-table(MarkovKette(UeMat,N))/N
> #invariante Verteilung
> r
```

0	1	2	3
0.28127	0.30206	0.27318	0.14350