

Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften

Übung 13

Nächste Woche: Probeklausur

Bringen Sie sich ein leeres Exemplar der Probeklausur mit, um sich eine “Musterlösung” zu erstellen.

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Betrachten wieder den Datensatz BLECH.DAT:

```
> BLECH
```

```
[1] 346 363 360 318 346 268 299  
287 310 349 333 365 281 265 344
```

Frage: Wird im Mittel ein Wert kleiner als 310 angenommen?
Benutze wieder den **t-Test**.

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Entscheide mich gegen $H_0 : \mu \geq 310$, falls $310 - \bar{x}$ groß, genauer:

Teststatistik: $T(x) = \sqrt{15} \frac{310 - \bar{x}}{s(x)}$

P-Wert:

$$\begin{aligned} P_{H_0} \left(\sqrt{15} \frac{310 - \bar{X}}{s(X)} > T(x) \right) &= P_{H_0} \left(\sqrt{15} \frac{-(310 - \bar{X})}{s(X)} < -T(x) \right) \\ &= P_{H_0} \left(\sqrt{15} \frac{\bar{X} - 310}{s(X)} < -T(x) \right) \\ &= F_{t_{14}}(-T(x)) \end{aligned}$$

$F_{t_{14}}(-T(x))$ Verteilungsfunktion in $T(x)$ der t_{14} -Verteilung.

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Bestimme den P-Wert für BLECH.DAT:

```
> TS<-sqrt(15)*(310-mean(BLECH))/sd(BLECH)
> TS
[1] -1.354669
> pt(-TS,df=14)
[1] 0.9015088
```

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Bestimme den P-Wert für BLECH.DAT:

```
> TS<-sqrt(15)*(310-mean(BLECH))/sd(BLECH)
> TS
[1] -1.354669
> pt(-TS,df=14)
[1] 0.9015088

> t.test(BLECH,alternative="less",mu=310)$p.value
[1] 0.9015088
```

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Bestimme den P-Wert für BLECH.DAT:

```
> TS<-sqrt(15)*(310-mean(BLECH))/sd(BLECH)
> TS
[1] -1.354669
> pt(-TS,df=14)
[1] 0.9015088

> t.test(BLECH,alternative="less",mu=310)$p.value
[1] 0.9015088
```

Lehne also $H_0 : \mu \geq 310$ nicht ab.

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Alternative zu P-Wert: Entscheide mich gegen H_0 , falls $T(x) > t_{14;1-\alpha}$ (Teststatistik größer als kritischer Wert = $1 - \alpha$ -Quantil der t-Verteilung)

```
> TS<-sqrt(15)*(310-mean(BLECH))/sd(BLECH)
> TS
[1] -1.354669
> #kritischer Wert
> qt(1-0.05,df=14)
[1] 1.76131
> #lehne H0 ab, falls TS>kritischer Wert
> TS>qt(1-0.05,df=14)
[1] FALSE
```


Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Alternative zu P-Wert: Entscheide mich gegen H_0 , falls $T(x) > t_{14;1-\alpha}$ (Teststatistik größer als kritischer Wert = $1 - \alpha$ -Quantil der t-Verteilung)

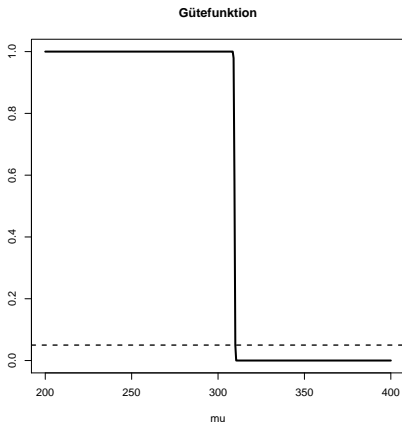
```
> TS<-sqrt(15)*(310-mean(BLECH))/sd(BLECH)
> TS
[1] -1.354669
> #kritischer Wert
> qt(1-0.05,df=14)
[1] 1.76131
> #lehne H0 ab, falls TS>kritischer Wert
> TS>qt(1-0.05,df=14)
[1] FALSE
```

Lehne also $H_0 : \mu \geq 310$ wiederum nicht ab.

Testproblem: $H_0 : \mu \geq 310$ gegen $H_1 : \mu < 310$

Gütefunktion

$$\gamma(\mu) = P_{\mu}(\text{Entscheidung für } H_1) = F_{t_{14}(\sqrt{N} \frac{\mu - 310}{\sigma})}(-t_{14,1-0.05})$$



ÜB 13 - Aufgabe 2

Testproblem: $H_0 : \sigma = 30$ gegen $\sigma \neq 30$

(Nehmen weiterhin an, dass die Daten normalverteilt sind)

Lehne H_0 ab, falls $\frac{s(x)}{30}$ zu groß oder zu klein, genauer:

$$T(x) = (N - 1) \frac{s(x)}{\sigma_0} = (15 - 1) \cdot \frac{s(x)}{30},$$

lehne H_0 ab, falls $T(x) > \chi_{N-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$ oder $T(x) < \chi_{N-1; \frac{\alpha}{2}}^2$.

Ein-Stichproben χ^2 (Chi-Quadrat)-Test

Testproblem: $H_0 : \sigma = 30$ gegen $\sigma \neq 30$

```
> TS_var<-(15-1)*sd(BLECH)/30
> TS_var
[1] 16.36613
> k1<-qchisq(0.975,df=14)
> k2<-qchisq(0.025,df=14)
> k1
[1] 26.11895
> k2
[1] 5.628726
> TS_var>k1
[1] FALSE
> TS_var<k2
[1] FALSE
```

Testproblem: $H_0 : \sigma = 30$ gegen $\sigma \neq 30$

```
> TS_var<-(15-1)*sd(BLECH)/30
> TS_var
[1] 16.36613
> k1<-qchisq(0.975,df=14)
> k2<-qchisq(0.025,df=14)
> k1
[1] 26.11895
> k2
[1] 5.628726
> TS_var>k1
[1] FALSE
> TS_var<k2
[1] FALSE
```

Lehne also $H_0 : \sigma = 30$ nicht ab.

Testproblem: $H_0 : \sigma \geq 30$ gegen $\sigma < 30$

Lehne H_0 ab, falls $\frac{s(x)}{30}$ zu klein, genauer:

$$T(x) = (N - 1) \frac{s(x)}{\sigma_0} = (15 - 1) \cdot \frac{s(x)}{30},$$

lehne H_0 ab, falls $T(x) < \chi_{N-1;\alpha}^2$ (α -Quantil der χ_{N-1}^2 -Verteilung).

Ein-Stichproben χ^2 (Chi-Quadrat)-Test

Testproblem: $H_0 : \sigma \geq 30$ gegen $\sigma < 30$

```
> TS_var<-(15-1)*sd(BLECH)/30  
> TS_var  
[1] 16.36613  
> k<-qchisq(0.05,df=14)  
> TS_var<k  
[1] FALSE
```


Testproblem: $H_0 : \sigma \geq 30$ gegen $\sigma < 30$

```
> TS_var<-(15-1)*sd(BLECH)/30  
> TS_var  
[1] 16.36613  
> k<-qchisq(0.05,df=14)  
> TS_var<k  
[1] FALSE
```

Lehne also $H_0 : \sigma \geq 30$ nicht ab.

ÜB 13- Aufgabe 3

Vergleich von BLECH und BLECH2

Vergleich von BLECH mit BLECH2 (Daten einer weiteren Produktionslinie):

364, 339, 289, 304, 362, 324, 314, 330, 301, 274, 319, 314, 326, 328, 310

Fragen: Unterscheiden sich die Blechdicken der beiden Produktionslinien im Mittel (Erwartungswert)?

Unterscheiden sie sich in der Streuung (Varianz)?

Testproblem: $H_0 : \mu_{BLECH} = \mu_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \mu_{BLECH} \neq \mu_{BLECH2}$

Mögliche Tests:

- Zweiseitiger t-Test, Voraussetzung: Normalverteilung, einfache Variante: gleiche Varianzen
`t.test(xdata,ydata,var.equal=TRUE)`

Testproblem: $H_0 : \mu_{BLECH} = \mu_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \mu_{BLECH} \neq \mu_{BLECH2}$

Mögliche Tests:

- Zweiseitiger t-Test, Voraussetzung: Normalverteilung, einfache Variante: gleiche Varianzen
`t.test(xdata,ydata,var.equal=TRUE)`
- Welch-Zweiseitiger t-Test, Voraussetzung: Normalverteilung, Varianzen können verschieden sein
`t.test(xdata,ydata,var.equal=FALSE)`

Testproblem: $H_0 : \mu_{BLECH} = \mu_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \mu_{BLECH} \neq \mu_{BLECH2}$

Mögliche Tests:

- Zweiseitiger t-Test, Voraussetzung: Normalverteilung, einfache Variante: gleiche Varianzen
`t.test(xdata,ydata,var.equal=TRUE)`
- Welch-Zweiseitiger t-Test, Voraussetzung: Normalverteilung, Varianzen können verschieden sein
`t.test(xdata,ydata,var.equal=FALSE)`
- Wilcoxon-Test, braucht keine Normalverteilung
`wilcox.test(xdata,ydata,alternative="two.sided")`

Test auf Normalverteilung (jeweils für die einzelnen Stichproben):

Shapiro-Wilk-Test (`shapiro.test(xdata)`)

oder

betrachte **Q-Q-Plot** (`qqnorm(xdata)`)

Test auf Normalverteilung

Shapiro-Wilk-Test

```
> shapiro.test(BLECH)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: BLECH

W = 0.9063, p-value = 0.1189

```
> shapiro.test(BLECH2)
```

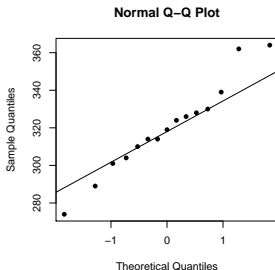
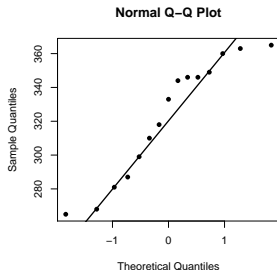
Shapiro-Wilk normality test

data: BLECH2

W = 0.9679, p-value = 0.8254

Überprüfe ob Normalverteilung vorliegt für die Daten BLECH und BLECH2

- > qqnorm(BLECH, pch=16)
- > qqline(BLECH, lwd=3)
- > qqnorm(BLECH2, pch=16)
- > qqline(BLECH2, lwd=2)



- Hypothese 1: $H_0 : \sigma_{BLECH1} = \sigma_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \sigma_{BLECH1} \neq \sigma_{BLECH2}$

- Hypothese 1: $H_0 : \sigma_{BLECH1} = \sigma_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \sigma_{BLECH1} \neq \sigma_{BLECH2}$
- 2 Produktionslinien, daher 2 ungepaarte Stichproben

- Hypothese 1: $H_0 : \sigma_{BLECH1} = \sigma_{BLECH2}$ gegen
 $H_1 : \sigma_{BLECH1} \neq \sigma_{BLECH2}$
- 2 Produktionslinien, daher 2 ungepaarte Stichproben
- Zweiseitiger Varianztest (**F-Test**) braucht **normalverteilte Daten**

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

Zweiseitiger Varianz-Test: Lehne $H_0 : \sigma_{BLECH1} = \sigma_{BLECH2}$ ab, falls $\frac{s(x)^2}{s(y)^2} > F_{N_1-1; N_2-1; 1 - \frac{\alpha}{2}}$ oder $\frac{s(x)^2}{s(y)^2} < F_{N_1-1; N_2-1; \frac{\alpha}{2}}$.

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

Zweiseitiger Varianz-Test: Lehne $H_0 : \sigma_{BLECH1} = \sigma_{BLECH2}$ ab, falls

$$\frac{s(x)^2}{s(y)^2} > F_{N_1-1; N_2-1; 1 - \frac{\alpha}{2}} \text{ oder } \frac{s(x)^2}{s(y)^2} < F_{N_1-1; N_2-1; \frac{\alpha}{2}}.$$

```
> var.test(BLECH,BLECH2)$p.value
```

```
[1] 0.1735977
```

```
> var.test(BLECH,BLECH2)$statistic
```

F

```
2.114378
```

```
> qf(1-0.025,14,14)
```

```
[1] 2.978588
```

```
> qf(0.025,14,14)
```

```
[1] 0.3357296
```

Wir können also gleiche Varianzen annehmen.

- 2. Hypothese: $\mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$ gegen $\mu_{BLECH1} \neq \mu_{BLECH2}$

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

- 2. Hypothese: $\mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$ gegen $\mu_{BLECH1} \neq \mu_{BLECH2}$
- Varianzen können als gleich angenommen werden, und wir gehen von normalverteilten Daten aus

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

- 2. Hypothese: $\mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$ gegen $\mu_{BLECH1} \neq \mu_{BLECH2}$
- Varianzen können als gleich angenommen werden, und wir gehen von normalverteilten Daten aus
- benutze 2-seitigen t-Test für zwei Stichproben

- 2. Hypothese: $\mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$ gegen $\mu_{BLECH1} \neq \mu_{BLECH2}$
- Varianzen können als gleich angenommen werden, und wir gehen von normalverteilten Daten aus
- benutze 2-seitigen t-Test für zwei Stichproben
- Lehne H_0 ab, falls $\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_{12}(x,y)} > t_{N_1+N_2-2; 1-\frac{\alpha}{2}}$

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

```
> t.test(BLECH,BLECH2,var.equal=T)$p.value  
[1] 0.8287128  
> t.test(BLECH,BLECH2,var.equal=T)$statistic  
      t  
0.2183853  
> qt(1-0.025,df=15+15-2)  
[1] 2.048407
```

Die Daten sprechen also nicht dagegen, dass die mittleren Blechdicken gleich sind.

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

```
> t.test(BLECH,BLECH2,alternative='two.sided',var.equal=F)
[1] 0.8289144
> t.test(BLECH,BLECH2,alternative='two.sided',var.equal=F)
      t
0.2183853
```

Auch wenn die Varianzen als ungleich angenommen werden, entscheiden wir uns nicht gegen H_0 : Mittlere Blechdicken sind gleich.

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

Alternativer Test für $H_0 : \mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$, der keine Normalverteilung braucht: Wilcoxon-Test

```
> wilcox.test(BLECH,BLECH2,alternative='two.sided')
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: BLECH and BLECH2

W = 121.5, p-value = 0.7243

alternative hypothesis: true location shift
is not equal to 0

Vergleich von BLECH1 und BLECH2

Alternativer Test für $H_0 : \mu_{BLECH1} = \mu_{BLECH2}$, der keine Normalverteilung braucht: Wilcoxon-Test

```
> wilcox.test(BLECH,BLECH2,alternative='two.sided')
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

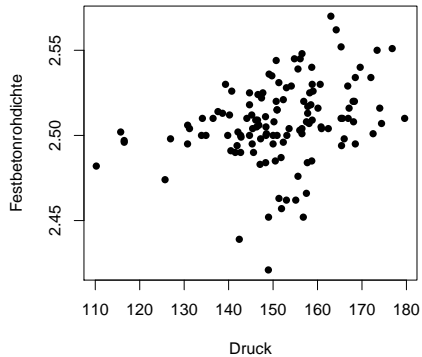
data: BLECH and BLECH2

W = 121.5, p-value = 0.7243

alternative hypothesis: true location shift
is not equal to 0

Auch hier wird die Hypothese nicht abgelehnt.

ÜB 13- Aufgabe 4



Druckfestigkeit

Testproblem: $H_0 : \rho = 0$ gegen $H_1 : \rho \neq 0$

- Zweiseitiger Korrelations-Test basierend auf Korrelationskoeffizienten von Pearson, setzt Normalverteilung voraus (`cor.test(xdata,ydata,method="pearson")`)

Testproblem: $H_0 : \rho = 0$ gegen $H_1 : \rho \neq 0$

- Zweiseitiger Korrelations-Test basierend auf Korrelationskoeffizienten von Pearson, setzt Normalverteilung voraus (`cor.test(xdata,ydata,method="pearson")`)
- Zweiseitiger Korrelations-Test basierend auf Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten (`cor.test(xdata,ydata,method="spearman")`)

Testproblem: $H_0 : \rho = 0$ gegen $H_1 : \rho \neq 0$

- Zweiseitiger Korrelations-Test basierend auf Korrelationskoeffizienten von Pearson, setzt Normalverteilung voraus (`cor.test(xdata,ydata,method="pearson")`)
- Zweiseitiger Korrelations-Test basierend auf Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten (`cor.test(xdata,ydata,method="spearman")`)
- χ^2 -Test, vor allem auch für nominale Merkmale, braucht keine Normalverteilung (`(chisq.test(xdata,ydata))`)

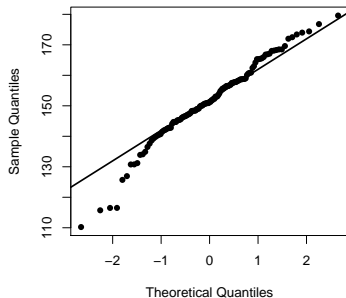
Überprüfe Normalverteilung für Druck und Festbetonrohddichte:

```
> qqnorm(beton$Druck,pch=16)
> qqline(beton$Druck,lwd=3)
> shapiro.test(beton$Druck)$p.value
[1] 0.01221
```

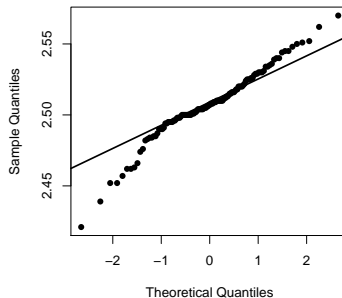
```
> qqnorm(beton$Festbetonrohddichte,pch=16)
> qqline(beton$Festbetonrohddichte,lwd=3)
> shapiro.test(beton$Festbetonrohddichte)$p.value
[1] 0.003074
```

Normalverteilung?

Normal Q-Q Plot



Normal Q-Q Plot



Test auf Zusammenhang

Benutze Korrelations-Test basierend auf
Rangkorrelationskoeffizienten

```
> cor.test(Festbetonrohddichte,Druck,method="spearman")
```

Spearman's rank correlation rho

```
data: beton$Festbetonrohddichte and beton$Druck  
S = 211725.2, p-value = 6.456e-05  
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0  
sample estimates:  
rho  
0.3495386
```

Test auf Zusammenhang

Benutze Korrelations-Test basierend auf
Rangkorrelationskoeffizienten

```
> cor.test(Festbetonrohddichte,Druck,method="spearman")
```

Spearman's rank correlation rho

```
data: beton$Festbetonrohddichte and beton$Druck  
S = 211725.2, p-value = 6.456e-05  
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0  
sample estimates:  
rho  
0.3495386
```

Lehne also H_0 : Es gibt keinen Zusammenhang ab: Es besteht ein signifikanter Zusammenhang!

Obwohl Voraussetzung nicht erfüllt, Test basierend auf Pearsons Korrelationskoeffizient:

```
> cor.test(Festbetonrohddichte,Druck,method="pearson")
```

Pearson's product-moment correlation

data: beton\$Festbetonrohddichte and beton\$Druck

t = 3.5794, df = 123, p-value = 0.0004938

alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0

95 percent confidence interval:

0.1390387 0.4580485

sample estimates:

cor

0.3071468

Obwohl Voraussetzung nicht erfüllt, Test basierend auf Pearsons Korrelationskoeffizient:

```
> cor.test(Festbetonrohddichte,Druck,method="pearson")
```

Pearson's product-moment correlation

```
data: beton$Festbetonrohddichte and beton$Druck
```

```
t = 3.5794, df = 123, p-value = 0.0004938
```

```
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.1390387 0.4580485
```

```
sample estimates:
```

```
cor
```

```
0.3071468
```

Lehne also H_0 : Es gibt keinen Zusammenhang ab: Es besteht ein signifikanter Zusammenhang!

Bei stetigen Daten, sollte der χ^2 -Test nicht verwendet werden!

```
> chisq.test(table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck))
```

Pearson's Chi-squared test

```
data:  table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck)
```

```
X-squared = 7022.9, df = 6804, p-value = 0.03127
```

Warnmeldung:

```
In chisq.test(table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck))
```

Chi-Quadrat-Approximation kann inkorrekt sein

Bei stetigen Daten, sollte der χ^2 -Test nicht verwendet werden!

```
> chisq.test(table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck))
```

Pearson's Chi-squared test

```
data:  table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck)
```

```
X-squared = 7022.9, df = 6804, p-value = 0.03127
```

Warnmeldung:

```
In chisq.test(table(beton$Festbetonrohddichte, beton$Druck))
```

Chi-Quadrat-Approximation kann inkorrekt sein

Lehne also auch hier H_0 : Es gibt keinen Zusammenhang ab: Es besteht ein signifikanter Zusammenhang!

Eine univariate (ein Merkmal) Stichprobe xdata

Test für den Erwartungswert (mittleren Wert)	Voraussetzung
t-Test (<code>t.test</code>) $H_0 : \mu = \mu_0$ <code>t.test(...,alternative="two.sided",...)</code> $H_0 : \mu \geq \mu_0$ <code>t.test(...,alternative="less",...)</code> $H_0 : \mu \leq \mu_0$ <code>t.test(...,alternative="greater",...)</code>	Normalverteilung
Wilcoxon-Test (<code>wilcox.test</code>)	-
Test für die Varianz	Voraussetzung
Ein-Stichproben χ^2-(Chi-Quadrat)-Test	Normalverteilung

Eine bivarariate Stichprobe (2 Merkmale) x, y

Tests auf Zusammenhang	Voraussetzung
Pearson-Korrelationstest $H_0 : \rho = 0$ kein Zusammenhang <code>cor.test(x,y,method='pearson')</code>	Normalverteilung
Spearmanscher-Rang-Korrelationstest $H_0 : \rho = 0$ kein Zusammenhang <code>cor.test(x,y,method='spearman')</code>	-
χ^2(Chi-Quadrat)-Test auf Unabhängigkeit $H_0 : \text{kein Zusammenhang}$ <code>chisq.test(table(x,y))</code>	(wenige verschiedene Werte)

Zwei univariate, ungepaarte Stichproben x, y

Test für den Vergleich der Varianzen F-Test oder Varianz-test für 2 Stichproben <code>var.test(x,y,...)</code>	Voraussetzung Normalverteilung
Test für den Vergleich der Mittelwerte 2-Stichproben- t-Test <code>t.test(x,y,var.equal=TRUE)</code>	Voraussetzung NV, gleiche Varianz
2-Stichproben- t-Test <code>t.test(x,y,var.equal=FALSE)</code>	NV
Wilcoxon-Test <code>wilcox.test(x,y)</code>	-