

# W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

## Übung 12

# Aufgabe 1 : Grundlage

Betrachten den Datensatz BLECH.DAT mit Dicken von 15 zufällig ausgewählten Blechen in  $10\mu\text{m}$ :

346, 363, 360, 318, 346, 268, 299, 287, 310, 349, 333, 365, 281, 265, 344

Untersuchen das Testproblem:

$H_0 : \mu = 310$  (Hypothese) gegen  $H_1 : \mu \neq 310$  (Alternative)

Unter der **Annahme**, dass die Daten aus einer Normalverteilung stammen können wir den sogenannten **t-Test** nutzen.

# Aufgabe 1 : Teststatistik

Die Teststatistik eines t-Tests ist:

$$T(x) = \sqrt{N} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s(x)} \sim t_{N-1}$$

wobei  $N$  die Anzahl,  $\bar{x}$  den empirischen Mittelwert,  $s(x)$  die Standardabweichung der Daten bezeichnen.  $\mu_0$  ist der erwartete Parameter.

```
> BLECH<-c(346,363,360,318,346,268,299,287,310,349,333,  
+365,281,265,344)  
> mu0<-310  
> N<-length(BLECH)  
> mean(BLECH)->M  
> sd(BLECH)->SD  
> sqrt(N)*abs(M-mu0)/SD  
[1] 1.354669
```

# Aufgabe 1 : P-Wert

- P-Wert:  $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$ , lehne  $H_0$  ab, wenn P-Wert kleiner als vorgegebenes Niveau  $\alpha$  (oft 0.05)
- Berechnung über Teststatistik
  - unter  $H_0 : \mu = 310$  gilt  $\sqrt{N} \frac{\bar{X} - 310}{s(x)} \sim t_{N-1}$
  - P-Wert hier  $2F_{t_{N-1}}(-T(x)) = 2F_{t_{14}}(-1.354669)$
  - `2*pt(-T,df=14)` in R liefert 0.197
- Berechnung mit in R implementiertem t-Test mit `t.test(BLECH,alternative="two.sided",mu=310)` liefert gleiches Ergebnis

**Entscheidung :**  $p\text{-Wert} > \alpha \Rightarrow H_0$  kann **nicht** abgelehnt werden

# Aufgabe 1 : P-Wert durch Simulation

Kennt man die Verteilung der Teststatistik nicht, kann der P-Wert auch durch Simulationen (näherungsweise) bestimmt werden:  
Simulationsverfahren:

- erzeuge  $M$  Stichproben  $x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$  mit je  $N$  Daten  $x^{(m)} = (x_1^m, \dots, x_N^m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , welche der Verteilungsannahme unter der Nullhypothese entsprechen ( $\mu = 310, \sigma^2$  passend)
- berechne für alle  $x^{(m)}$  die Teststatistik des t-Tests
- bestimme den Anteil der Teststatistiken, die größer als die tatsächlich beobachtete
- der Anteil dieser entspricht dem P-Wert

## Aufgabe 1 : Simulation des P-Wertes in R, $\sigma = 1$

```
> M<-10000      #Anzahl der Simulationen
> sigma0<-1     #Festlegung der Standardabweichung
> ts<-numeric(M) #Platzhalter für sim. Statistiken
> for (i in (1:M))
+ {
+   testdaten<-rnorm(N,mu0,sigma0)
+   ts[i]<-sqrt(N)*abs(mean(testdaten-mu0))/sd(testdaten)
+ }
> 1/M*sum(ts>=T)
[1] 0.2045
```

## Aufgabe 1 : Simulation des P-Wertes in R, $\sigma = 30$

```
> M<-10000      #Anzahl der Simulationen
> sigma0<-30    #Festlegung der Standardabweichung
> ts<-numeric(M) #Platzhalter für sim. Statistiken
> for (i in (1:M))
+ {
+   testdaten<-rnorm(N,mu0,sigma0)
+   ts[i]<-sqrt(N)*abs(mean(testdaten-mu0))/sd(testdaten)
+ }
> 1/M*sum(ts>=T)
[1] 0.1923
```

**Auswirkung:** Bei steigendem  $\sigma$  fällt P-Wert

# Aufgabe 1 : Alternative Entscheidungsregel

Testproblem:

$$H_0 : \mu = 310 \text{ gegen } H_1 : \mu \neq 310$$

Für die Entscheidung können wir folgenden Zusammenhang nutzen:

$$\mathbb{P}_{H_0}[T(X) > T(x)] \leq \alpha \Leftrightarrow T(x) > t_{N-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Es genügt also  $T(x)$  mit dem  $1 - \frac{\alpha}{2}$  Quantil der t-Verteilung mit  $N - 1$  Freiheitsgraden zu vergleichen.

**Entscheidungsregel:**

Lehne  $H_0$  ab, falls  $T(x) > t_{N-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$  gilt

In R:

```
>alpha<-0.05  
> T > qt(1-alpha/2,df=N-1)  
[1] FALSE
```

**Aussage:**  $H_0$  kann **nicht** abgelehnt werden



Betrachte den Datensatz:

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1, x_6 = 5$$

- Ordne den Datensatz
- Bestimme Ränge der Daten
- Median=?
- Quartilsabstand=?
- arithmetisches Mittel=?

Betrachte den Datensatz:

$$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1, x_6 = 5$$

- Ordne den Datensatz

$$x_1, x_5, x_3, x_4, x_2, x_6$$

- Bestimme Ränge der Daten

$$R(x_1) = 1, R(x_2) = 5, R(x_3) = 3, R(x_4) = 4, \\ R(x_5) = 1, R(x_6) = 6$$

- Median=?

$$2.5$$

- Quartilsabstand=?

$$2.5$$

- arithmetisches Mittel=?

$$2\frac{2}{3}$$

# Aufgabe 1 : Fehler 2. Art

Fehler 2. Art: Nicht verwerfen von  $H_0$ , obwohl  $H_1$  gilt.

Im t-Test explizit berechenbar:

Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art, mit wahren Mittelwert  $\mu$  ist

$$F_{t_{N-1}\left(\frac{\sqrt{N}(\mu-\mu_0)}{\sigma}\right)}\left(t_{N-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F_{t_{N-1}\left(\frac{\sqrt{N}(\mu-\mu_0)}{\sigma}\right)}\left(-t_{N-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

also hier:

$$P_{\mu=300}\left(T(X) \leq t_{14;1-\frac{0.05}{2}}\right)$$

=

$$F_{t_{14}\left(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma}\right)}\left(t_{14;1-\frac{0.05}{2}}\right) - F_{t_{14}\left(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma}\right)}\left(-t_{14;1-\frac{0.05}{2}}\right)$$

# Aufgabe 1 : Lösungen (d) und (e)

```
> mu<-300    #Wahrer Parameter
```

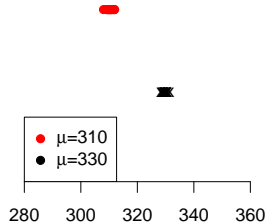
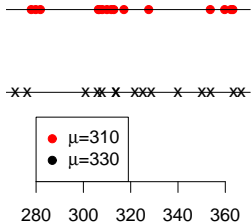
$\sigma = 1$ :

```
> ncp1<-sqrt(N)*(mu-mu0)/sigma1
> pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncp1)
-pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncp1)
[1] 0
```

$\sigma = 30$ :

```
> ncp2<-sqrt(N)*(mu-mu0)/sigma2
> pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncp2)
-pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncp2)
[1] 0.7745203
```

## Aufgabe 1 : Darstellung der Streuung



Links: Varianz  $\sigma = 30$ , Rechts: Varianz  $\sigma = 1$

# Aufgabe 1 : Fehler 2. Art mittels Simulation

Simulation der Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn  $\mu = 300$  gilt.

- erzeuge  $M$  Stichproben  $x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$  mit je  $N$  Daten  $x^{(m)} = (x_1^m, \dots, x_N^m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , welche der Verteilungsannahme unter dem wahren Parameter entsprechen ( $\mu = 300, \sigma^2$  passend)
- berechne für jede Stichprobe die zugehörige Teststatistik
- zähle Anteil, wie oft Teststatistik unter kritischem Wert, also wie oft  $H_0$  nicht abgelehnt wird = Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für  $\mu = 300$

## Aufgabe 1 : Fehler 2. Art mittels Simulation, $\sigma = 1$

```
>ts<-numeric(M)
>for (i in (1:M))
+{
+ testdaten<-rnorm(N,mu,sigma1)
+ ts[i]<-sqrt(N)*abs(mean(testdaten-mu0))/sd(testdaten)
+}
>1/M*sum(ts<=qt(1-alpha/2,df=N-1))
[1] 0
```

## Aufgabe 1 : Fehler 2. Art mittels Simulation, $\sigma = 30$

```
> ts<-numeric(M)
> for (i in (1:M))
+ {
+   testdaten<-rnorm(N,mu,sigma2)
+   ts[i]<-sqrt(N)*abs(mean(testdaten-mu0))/sd(testdaten)
+ }
> 1/M*sum(ts<=qt(1-alpha/2,df=N-1))
[1] 0.7676
```



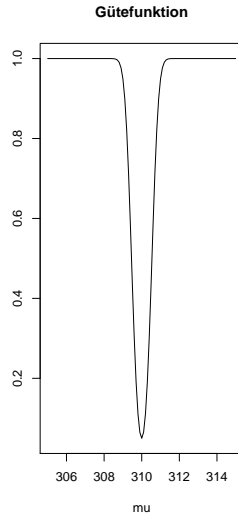
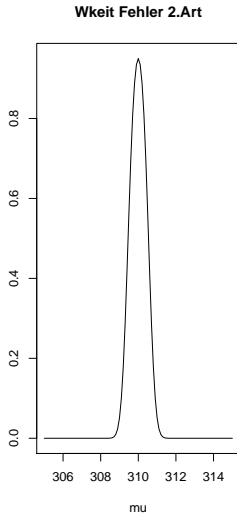
# Aufgabe 1 : Gütefunktion

Die Gütefunktion ist 1 - "Fehlerwahrscheinlichkeit 2.Art", sie gibt die Wahrscheinlichkeit für die Entscheidung für  $H_1$  (also Ablehnung von  $H_0$ ) an.

Wir betrachten  $\mu$ 's zwischen 305 und 315 um in Abbildungen etwas zu sehen

```
mus<-seq(305,315,0.1)
ncps<-sqrt(N)*(mus-mu0)
plot(mus,pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      -pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps),
      type="l",ylab="",xlab="mu"
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mus,1-pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      +pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      ,type="l",ylab="",ylab="mu",main="Gütefunktion")
```

# Aufgabe 1 : Abbildungen zu (h)



## Aufgabe 1 : Güte mit $N=100$

```
N<-100
mus<-seq(305,315,0.1)
ncps<-sqrt(N)*(mus-mu0)
plot(mus,pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      -pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps),
      type="l",ylab="",xlab="mu"
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mus,1-pt(qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      +pt(-qt(1-alpha/2,df=N-1),df=N-1,ncp=ncps)
      ,type="l",ylab="",ylab="mu",main="Gütefunktion")
```

# Aufgabe 1 : Abbildungen zu (i)

