

Übung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den Ingenieurwissenschaften Übung 11

zusätzliche Fragestunde

Mittwoch, 17.2.2010, 14.00-15.00 und 15.00-16.00 Uhr
Raum M/748

Bitte mit Anmeldung über denecke@statistik.tu-dortmund.de!

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Betrachten das Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$ für folgenden Datensatz:

```
> source("BLECH.DAT")  
> BLECH  
[1] 346 363 360 318 346 268 299  
287 310 349 333 365 281 265 344
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Wähle als Teststatistik $T(x) = \sqrt{N} \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s(x)}$.

```
> mean(BLECH)
```

```
[1] 322.2667
```

```
> sd(BLECH)
```

```
[1] 35.07027
```

```
> sqrt(15)*abs(mean(BLECH)-310)/sd(BLECH)
```

```
[1] 1.354669
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$
- unter $H_0 : \mu = 310$ gilt $\sqrt{N} \frac{|\bar{X} - 310|}{s(x)} \sim t_{N-1}$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$
- unter $H_0 : \mu = 310$ gilt $\sqrt{N} \frac{|\bar{X} - 310|}{s(x)} \sim t_{N-1}$
- P-Wert hier $2F_{t_{N-1}}(-T(x)) = 2F_{t_{14}}(-1.354669)$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$
- unter $H_0 : \mu = 310$ gilt $\sqrt{N} \frac{|\bar{X} - 310|}{s(x)} \sim t_{N-1}$
- P-Wert hier $2F_{t_{N-1}}(-T(x)) = 2F_{t_{14}}(-1.354669)$
- `2*pt(-T,df=14)` in R liefert 0.3342819

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

- P-Wert: $P_{H_0}(T(X) \geq T(x))$, lehne H_0 ab, wenn P-Wert kleiner als $\alpha (= 0.05)$
- unter $H_0 : \mu = 310$ gilt $\sqrt{N} \frac{|\bar{X} - 310|}{s(x)} \sim t_{N-1}$
- P-Wert hier $2F_{t_{N-1}}(-T(x)) = 2F_{t_{14}}(-1.354669)$
- `2*pt(-T,df=14)` in R liefert 0.3342819
- dasselbe Ergebnis liefert auch
`t.test(BLECH,alternative="two.sided",mu=310)`

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simuliere P-Wert:

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 310$ und σ^2

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simuliere P-Wert:

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 310$ und σ^2
- berechne für alle x^m die Teststatistik

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simuliere P-Wert:

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 310$ und σ^2
- berechne für alle x^m die Teststatistik
- bestimme den Anteil der Teststatistiken, die größer als die beobachtete = P-Wert

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

$$\sigma = 1$$

```
> ts<-numeric(1000)
> for (i in (1:1000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,310,1)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> 1/1000*sum(ts>=T)
[1] 0.348
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

$$\sigma = 30$$

```
> ts<-numeric(1000)
> for (i in (1:1000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,310,30)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> 1/1000*sum(ts>=T)
[1] 0.319
```

Aufgabe zur Entspannung:

Datensatz: $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 1, x_6 = 5$

- Ordne den Datensatz
- Bestimme Ränge der Daten
- Median=?
- Quartilsabstand=?
- arithmetisches Mittel=?

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Lehne H_0 ab, falls $T(x) > t_{N-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ gilt.

```
> qt(0.975, df=14)  
[1] 2.144787
```


Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Fehler 2. Art: Entscheidung für H_0 , obwohl H_1 gilt, also hier:

$$P_{H1}(T(X) \leq t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) = F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(-t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Fehler 2. Art: Entscheidung für H_0 , obwohl H_1 gilt, also hier:

$$P_{H_1}(T(X) \leq t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) = F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(-t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}).$$

$\sigma = 1$

```
> ncp<-sqrt(15)*(300-310)/1
> pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
-pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
[1] 0
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Fehler 2. Art: Entscheidung für H_0 , obwohl H_1 gilt, also hier:

$$P_{H1}(T(X) \leq t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) = F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{14}(\frac{\sqrt{15}(300-310)}{\sigma})}(-t_{14;1-\frac{\alpha}{2}}).$$

$\sigma = 1$

```
> ncp<-sqrt(15)*(300-310)/1
> pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
-pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
[1] 0
```

$\sigma = 30$

```
> ncp<-sqrt(15)*(300-310)/30
> pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
-pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
[1] 0.7745203
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simulation der Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn $\mu = 300$ gilt.

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 300$ und σ^2

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simulation der Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn $\mu = 300$ gilt.

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 300$ und σ^2
- Berechne für jede Stichprobe die zugehörige Teststatistik

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

Simulation der Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn $\mu = 300$ gilt.

- erzeuge $M = 1000$ Stichproben x^1, \dots, x^M mit je $N = 15$ Daten $x^m = (x_1^m, \dots, x_{15}^m)$, $m = 1, \dots, M$ mit Normalverteilung, $\mu = 300$ und σ^2
- Berechne für jede Stichprobe die zugehörige Teststatistik
- zähle Anteil, wie oft Teststatistik unter kritischem Wert, also wie oft H_0 nicht abgelehnt wird = Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für $\mu = 300$

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

```
> ts<-numeric(1000)
> for (i in (1:1000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,300,1)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> sum(ts<=qt(0.975,df=14))
[1] 0
```

Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

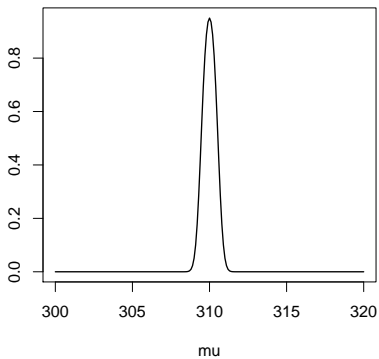
```
> ts<-numeric(1000)
> for (i in (1:1000))
+ {
+   testdaten<-rnorm(15,300,30)
+   ts[i]<-sqrt(15)*abs(mean(testdaten-310))/sd(testdaten)
+ }
> sum(ts<=qt(0.975,df=14))/1000
[1] 0.78
```


Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

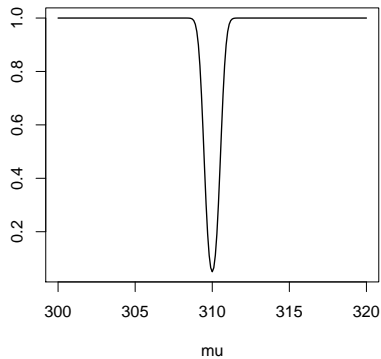
Die Gütefunktion ist 1-Fehlerwahrscheinlichkeit 2.Art.

```
mu<-seq(300,320,0.1)
ncp<-sqrt(15)*(mu-310)
plot(mu,pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      -pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mu,1-pt(qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      +pt(-qt(0.975,df=14),df=14,ncp=ncp)
      ,type="l",ylab="",main="Gütefunktion")
```

Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art



Gütefunktion

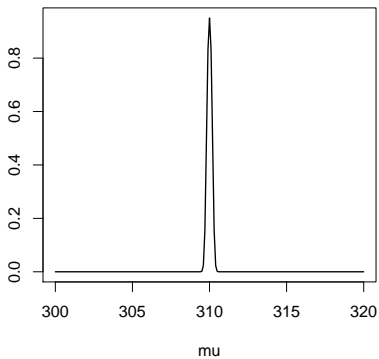


Testproblem $H_0 : \mu = 310$ gegen $H_1 : \mu \neq 310$.

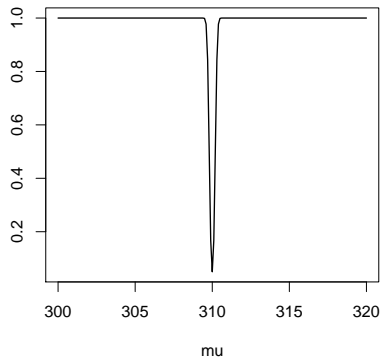
$N = 100$

```
mu<-seq(300,320,0.1)
ncp<-sqrt(100)*(mu-310)
plot(mu,pt(qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp)
      -pt(-qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",
      main="Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art")
plot(mu,1-pt(qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp)
      +pt(-qt(0.975,df=99),df=99,ncp=ncp),
      type="l",ylab="",main="Gütefunktion")
```

Wahrscheinlichkeit Fehler 2. Art



Gütefunktion



Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit $H_0 : \mu = 310$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 nicht abgelehnt wird, wenn $\mu = 300$ gilt?

Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit $H_0 : \mu = 310$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 nicht abgelehnt wird, wenn $\mu = 300$ gilt?

Für alle $|\mu - \mu_0| > \delta \cdot \sigma$ gilt: Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art $< \beta$
wenn $N \geq N_0$ mit N_0 sodass:

$$F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(-t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) \leq \beta.$$

Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit $H_0 : \mu = 310$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 nicht abgelehnt wird, wenn $\mu = 300$ gilt?

Für alle $|\mu - \mu_0| > \delta \cdot \sigma$ gilt: Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art $< \beta$
wenn $N \geq N_0$ mit N_0 sodass:

$$F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(-t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) \leq \beta.$$

$\sigma = 1$, dann $\delta = 10$, $\beta = 0.05$

Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit $H_0 : \mu = 310$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 nicht abgelehnt wird, wenn $\mu = 300$ gilt?

Für alle $|\mu - \mu_0| > \delta \cdot \sigma$ gilt: Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art $< \beta$
wenn $N \geq N_0$ mit N_0 sodass:

$$F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) - F_{t_{N_0-1}(\sqrt{N_0}\delta)}(-t_{N_0-1;1-\frac{\alpha}{2}}) \leq \beta.$$

$\sigma = 1$, dann $\delta = 10$, $\beta = 0.05$ $\sigma = 30$, dann $\delta = \frac{1}{3}$, $\beta = 0.05$


```
> N<-2  
> delta<-10  
> ncp<-sqrt(N)*delta  
> pt(qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)-pt(-qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)  
[1] 0.2671804
```

```
> N<-3  
> delta<-10  
> ncp<-sqrt(N)*delta  
> pt(qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)-pt(-qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)  
[1] 4.228304e-07
```

```
> N<-100
> delta<-1/3
> ncp<-sqrt(N)*delta
> pt(qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)-pt(-qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)
[1] 0.08998247
```

```
> N<-119
> delta<-1/3
> ncp<-sqrt(N)*delta
> pt(qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)-pt(-qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)
[1] 0.0498281
```

```
> N<-118
> delta<-1/3
> ncp<-sqrt(N)*delta
> pt(qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)-pt(-qt(0.975,df=(N-1)),df=(N-1),ncp=ncp)
[1] 0.05143629
```