

W-Rechnung und Statistik für Ingenieure

Übung 10

Aufgabe 1 : Dreiecksverteilung

f sei die Dichte der Dreiecksverteilung über $[0, 2]$, wobei f eine Dreiecksgestalt hat.

Da f eine steige Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Aufgrund des Trägers ist $f(x) = 0$ außerhalb von $[0, 2]$, sonst Dreieck über $[0, 2]$, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{Flächeninhalt des Dreiecks} = \frac{1}{2} \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = 1.$$

Die Grundseite ist aufgrund des Trägers mit einer Länge von 2 festgelegt. In einem allgemeinen Dreieck muss somit die Höhe 1 sein, damit der Flächeninhalt 1 ergibt.

Aufgabe 1 : Dreiecksverteilung

Nehmen wir an, dass das Dreieck gleichschenkelig ist, so liegt die Spitze im Punkt $(1, 1)$.

D.h. f besteht aus Gerade von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ und Gerade von $(1, 1)$ nach $(2, 0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1 : Verteilung und Kennzahlen

- Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
- Erwartungswert: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt$
- Varianz: $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 \cdot f(t)dt$
- $Q_{0,25}(X)$ ist der kleinste Wert x sodass $F(x) \geq 0,25$
- $Q_{0,75}(X)$ ist der kleinste Wert x sodass $F(x) \geq 0,75$

Aufgabe 1 : Verteilung und Kennzahlen

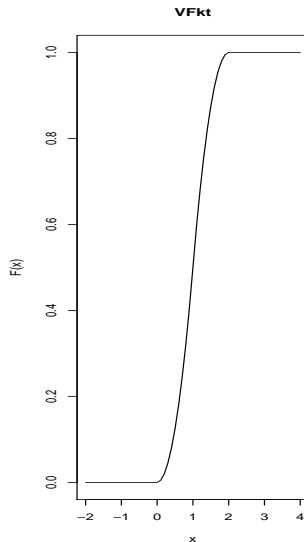
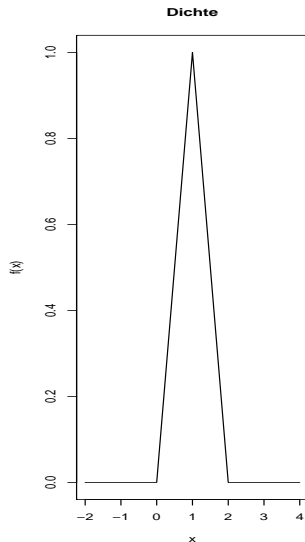
$$\text{Verteilungsfkt.: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Erwartungswert: } E(X) = 1$$

$$\text{Varianz: } \text{Var}(X) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Quantile: } Q_{0,25} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad Q_{0,75} = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 1 : Abbildungen



Aufgabe 2 : Tabelle

$P(X = i, Y = j)$		Y			$P(X = i)$
		1	2	3	
X	1	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{20}$
	2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$
	3	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$
	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$
$P(Y = j)$		$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	1

Beachte, dass die Variablen diskret sind.

- $E[X] = \sum_{x_i \in T_x} x_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i]$
- $var(X) = \sum_{x_i \in T_x} (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{P}[X = x_i]$
- $E[X \cdot Y] = \sum_{x_i \in T_x, y_i \in T_y} x_i \cdot y_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_i]$
- $kov(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$
- $Korr(X, Y) = \frac{kov(X, Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$

Aufgabe 2 : Ergebnisse

- $E(X) = \frac{61}{20} = 3,05$
- $E(Y) = \frac{37}{20} = 1,85$
- $Var(X) = \frac{339}{400} = 0,8475$
- $Var(Y) = \frac{251}{400} = 0,6275$
- $E[XY] = 5,95$
- $Kov(X, Y) = \frac{123}{400} = 0,3075$
- $Korr(X, Y) = \frac{123}{\sqrt{339 \cdot 251}} = 0,422$