Prof. Dr. Ch. H. Müller
M.Sc. M. Jakubzik

Wintersemester 19/20

15. Januar 2020

Statistik der Zuverlässigkeit & Materialermüdung

13. Übungsblatt

Abgabe: 21. Januar 2020, 18:00 Uhr, Briefkasten 123

Aufgabe 20 (Lastumverteilungssysteme) *10 Punkte*

Betrachten Sie $J = 9$ Lastumverteilungssysteme mit jeweils $I = 25$ Komponenten und Belastungsniveaus $(s_1, \ldots, s_9) = (80, 80, 80, 120, 120, 120, 200, 200, 200)$. Es sei überdies $I_j = 9$ für $j = 1, \ldots, J$, d.h. es werden Wartezeiten $w_{i,j}, i = 0, \ldots, I_j, j = 1, \ldots, J$ beobachtet mit

$$W_{i,j} \sim \mathcal{E}\left(\lambda_\theta\left(i, s_j\right)\right) , \quad i = 0, \ldots, I_j \, , j = 1, \ldots, J \, ,$$

wobei ferner gelte:

$$\lambda_\theta(i, s) := h_\theta\left(s \cdot \frac{I}{I - i}\right) , \quad h_\theta(x) := \exp\left(-\theta_1 + \theta_2 \ln(x)\right) .$$

Schließlich seien Realisationen $w_{i,0}, i = 1, \ldots, I_0$, von

$$W_{i,0} \sim \mathcal{E}\left(\lambda_\theta\left(i, s_0\right)\right) , \quad i = 0, \ldots, I_0 \, ,$$

gegeben, wobei $I_0 = 4$ und $s_0 = 60$ sei.

(a) Nehmen Sie an, dass $\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top = (28, 3)^\top$ gelte und simulieren Sie die Wartezeiten $w_{i,j}$ für $i = 0, \ldots, I_j$ und $j = 0, 1, \ldots, J$. Finden Sie eine Möglichkeit, die simulierten Prozesse geeignet grafisch darzustellen.

(b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ basierend auf den simulierten Wartezeiten aus Aufgabenteil (a). Sie dürfen dazu die Funktion `optim()` verwenden.

(c) Geben Sie den geschätzten erwarteten Zeitpunkt des **zehnten** Komponentenversagens im neuen System an. Berücksichtigen Sie hierbei, dass in Aufgabenteil (a) bereits $I_0 + 1$ Wartezeiten simuliert wurden und wählen Sie I_* entsprechend!

Bonusfrage: *5 Punkte*

In Aufgabenteil (b) wird eine mehrdimensionale Optimierung vorgenommen, da der Parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top$ zweidimensional ist. Setzt man jedoch die Ableitung der Likelihoodfunktion nach θ_1 gleich 0, so ist es möglich, $\widehat{\theta}_1$ als Funktion von θ_2 darzustellen. Zeigen Sie diesen Sachverhalt explizit und nutzen Sie ihn aus, um in Teil (b) eine eindimensionale Optimierung vorzunehmen. Sie dürfen in diesem Falle auf die mehrdimensionale Optimierung verzichten.