Folie Roulette

(A1)

(a) Einsatz e_A

In einer Runde kann eine Zahl aus $\{0, \ldots 36\}$ fallen. X sei ZVar, die eine Runde beschreibt. $\mathbb{P}(X=\{i\})$

Wir haben also $\Omega = \{0, \ldots, 36\}$ und $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{37}$, $i \in \Omega$
(Laplace - Experiment)

Für ein Setzereignis $A \hat{=} \{$Setze auf Zahl a gewinne$\}$ ist also $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{37} = \mathbb{P}(X \in A)$

Mit Einsatz e_A erhält man $e_A \cdot 36$ mit Wkeit $\frac{1}{37}$.

(b) Nun sei das Setzen gegeben durch $A = \{a_1, \ldots a_k\}$, wobei $a_i \in \{0, \ldots 36\}$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$.

Wir setzen also k-Zahlen und gewinnen, falls eine von diesen fällt.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \frac{k}{37} \qquad \left[\frac{\#\text{ mgl. Erfolge}}{\#\text{ Gesamte Mgl.}}\right]$$

Mit Einsatz e_A welche auf k Zahlen geteilt wird bekommt man $\frac{e_A}{k} \cdot 36$ mit Wkeit $\frac{k}{37}$.

(c)

$$B_A(\omega) = \frac{e_A}{k} \cdot 36 \cdot \mathbb{1}_{\{\omega \in A\}}$$

$$\Rightarrow \quad P_{B_A}(x) = \frac{k}{37} \cdot \mathbb{1}_{\{x = \frac{e_A}{k} \cdot 36\}} + \left(1 - \frac{k}{37}\right) \mathbb{1}_{\{x = 0\}}$$

d.h. Mit Wkeit $\frac{k}{37}$ realisiert B_A den Wert $\frac{e_A}{k} \cdot 36$ und mit Wkeit $(1 - \frac{k}{37})$ den Wert 0.

Der Gewinn ist $G_A = B_A - e_A = \frac{e_A}{k} \cdot 36 - e_A = e_A(\frac{36}{k} - 1)$

$$\Rightarrow \quad P_{G_A}(x) = \frac{k}{37} \mathbb{1}_{\{x = e_A(\frac{36}{k} - 1)\}} + \left(1 - \frac{k}{37}\right) \mathbb{1}_{\{x = -e_A\}}$$

d.h. Mit Wkeit $\frac{k}{37}$ $B_A - e_A$ als Gewinn und Wkeit $1 - \frac{k}{37}$ Verlust von e_A.

(d) Der Raum aller Mgl. Werte für G_A ist $\{e_A(\frac{36}{k} - 1), -e_A\}$. Die Wkeiten kennen wir aus der Dichte.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[G_A] = \sum_{x \in T_{G_A}} x \cdot P_{G_A}(x) = e_A\left(\frac{36}{k} - 1\right) \cdot \frac{k}{37} + (-e_A) \cdot \left(1 - \frac{k}{37}\right)$$

$$= \left(\frac{e_A \cdot 36}{k} - e_A\right) \frac{k}{37} - e_A + \frac{e_A k}{37}$$

$$= \frac{e_A \cdot k \cdot 36}{k \, 37} - \frac{e_A k}{37} - e_A + \frac{e_A k}{37} = \frac{36}{37} e_A - e_A = \underline{\underline{-\frac{1}{37} e_A}}$$

Man erwartet also einen Verlust von $\frac{1}{37}$ des Einsatzes e_A.

Für die Varianz greifen wir auf eine geeignete ZVar X zurück, welche die Berechnung vereinfacht.

Wähle $X = \dfrac{G_A + e_A}{e_A\left(\frac{36}{k}\right)}$

$$\Rightarrow \quad G_A = e_A\left(\frac{36}{k}\right) \cdot X - e_A$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}[G_A] = \left(e_A \cdot \frac{36}{k}\right)^2 \cdot \mathbb{V}[X]$$

Wie sieht die Dichte von X aus?

Ist $G_A = -e_A \Rightarrow X = 0$

Ist $G_A = e_A \cdot \frac{36}{k} - e_A \Rightarrow X = \dfrac{e_A \cdot \frac{36}{k} - e_A + e_A}{e_A\left(\frac{36}{k}\right)} = 1$

$$\Rightarrow \quad p_X(x) = \frac{k}{37} \mathbb{1}_{\{x=1\}} + \left(1 - \frac{k}{37}\right) \mathbb{1}_{\{x=0\}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] = 0 \cdot \left(1 - \frac{k}{37}\right) + 1 \cdot \left(\frac{k}{37}\right) = \frac{k}{37}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 0 \cdot \left(1 - \frac{k}{37}\right) + 1^2 \cdot \left(\frac{k}{37}\right) = \frac{k}{37}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}[X] = \frac{k}{37} - \frac{k^2}{37^2} = \frac{k}{37}\left(1 - \frac{k}{37}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[G_A] = e_A^2 \cdot \left(\frac{36}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{37}\left(1 - \frac{4}{37}\right)$$

(e) $A_1 = \{\text{Setze } e_A = 100 \text{ auf } 9\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(G_{A_1}) = \frac{1}{37}$$

$$\mathbb{E}[G_{A_1}] = -100\left(1 - \frac{1}{37}\right) + 36 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)$$

$$= -100 \cdot \frac{1}{37} \approx -2.703$$

$$\mathbb{E}[G_{A_2}] = -\frac{1}{37} e_{A_2} = -\frac{50}{37} \approx -1.351$$

$\Rightarrow$ Erwartete Verlust bei Diversifikation niedriger

$$\mathbb{V}[G_{A_1}] = 100^2 \cdot \left(\frac{36}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{37}\left(1 - \frac{1}{37}\right) \approx 291.89^2$$

$$\mathbb{V}[G_{A_2}] = 50^2 \left(\frac{36}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{37}\left(1 - \frac{4}{37}\right) \approx 139.73^2$$

$\Rightarrow$ Diversifikation schmälert auch das Risiko bzgl der Unsicherheit des erwarteten Verlustes!

(f)

$A_3 = \{\text{Setze } 100 \text{ auf } 9\} \cup \{\text{Setze } 12.5 \text{ auf } 25, 26, 28, 29\}$

Da wir A_3 als $A_1 \cup A_2$ schreiben können und der Erwartungswert linear ist gilt:

$$\mathbb{E}[G_{A_3}] = \mathbb{E}[G_{A_1} + G_{A_2}] = \mathbb{E}[G_{A_1}] + \mathbb{E}[G_{A_2}]$$

$$\approx -1.351 - 2.703 \approx -4.0543$$

Der erwartete Verlust wird höher

Nun tritt A_1 nicht ein, wenn A_2 eingetreten ist u.U.

$\Rightarrow$ A_1, A_2 nicht stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}[G_{A_3}] \neq \mathbb{V}[G_{A_1}] + \mathbb{V}[G_{A_2}]$$

Wir müssen

$$\mathbb{V}[G_{A_3}] = \mathbb{V}[G_{A_1}] + \mathbb{V}[G_{A_2}] + 2\,\mathrm{Kov}(G_{A_1}, G_{A_2})$$

nutzen

Nun ist $\mathrm{Kov}(G_{A_1}, G_{A_2}) = \mathbb{E}[G_{A_1} G_{A_2}] - \mathbb{E}[G_{A_1}]\mathbb{E}[G_{A_2}]$

Wir benötigen also die gemeinsame Verteilung von (G_{A_1}, G_{A_2}) um den ersten Erwartungswert zu berechnen.

$G_{A_1} \in \{-100, 3500\}$

$G_{A_2} \in \{-50, 400\}$

Um die Verteilung von (G_{A_1}, G_{A_2}) vollständig zu bestimmen berechne

$$\mathbb{P}((G_{A_1}, G_{A_2}) = (-100, -50)) \overset{Def}{=} \mathbb{P}(G_{A_1} = -100, G_{A_2} = -50)$$

$$\overset{Def}{=} \mathbb{P}(G_{A_1} = -100 \mid G_{A_2} = -50) \cdot \mathbb{P}(G_{A_2} = -50)$$

$$= \mathbb{P}(\text{"nicht 9 wenn nicht 28, 29, 26, 25"}) \cdot \mathbb{P}(\text{"nicht 28, 29, 26, 25"})$$

$$= \frac{32}{34} \cdot \frac{34}{37} = \frac{32}{37}$$

$$\mathbb{P}((G_{A_1}, G_{A_2}) = (-100, 400)) = \mathbb{P}(G_{A_1} = -100, G_{A_2} = 400)$$

$$= \mathbb{P}(G_{A_1} = -100 \mid G_{A_2} = 400) \cdot \mathbb{P}(G_{A_2} = 400)$$

$$\overset{s.o.}{=} 1 \cdot \frac{4}{37} = \frac{4}{37}$$

$$\mathbb{P}((G_{A_1}, G_{A_2}) = (3500, -50)) = \mathbb{P}(G_{A_1} = 3500, G_{A_2} = -50)$$

$$= \mathbb{P}(G_{A_1} = 3500 \mid G_{A_2} = -50) \cdot \mathbb{P}(G_{A_2} = -50)$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \frac{34}{37} = \frac{1}{37}$$

$$\mathbb{P}((G_{A_1}, G_{A_2}) = (3500, 400)) = \mathbb{P}(G_{A_1} = 3500, G_{A_2} = 400)$$

$$= \mathbb{P}(G_{A_1} = 3500 \mid G_{A_2} = 400) \cdot \mathbb{P}(G_{A_2} = 400)$$

$$= 0 \cdot \frac{4}{37} = 0$$

$$\mathbb{E}[G_{A_1} G_{A_2}] = \sum_{\substack{g_{A_1} \in \{3500, -100\} \\ g_{A_2} \in \{400, -50\}}} g_{A_1} g_{A_2} \cdot \mathbb{P}((G_{A_1}, G_{A_2}) = (g_{A_1}, g_{A_2}))$$

$= (-100 \cdot -50) \cdot \frac{32}{37} + (-100 \cdot 400) \cdot \frac{4}{37} + (3500 \cdot -50) \cdot \frac{1}{37} + (3500 \cdot 400) \cdot 0$

$= 5000 \cdot \frac{32}{37} - 40000 \cdot \frac{4}{37} - 175000 \cdot \frac{1}{37} \approx 13378.38$

$\Rightarrow Kov(G_{A_1}, G_{A_2}) \approx -4729.73 - 2.703 \cdot 1.351$

$\approx -4729.73 - 3.652301$

≈ -4733.382

$\Rightarrow \mathbb{V}[G_A] = 139.79^2 + 291.89^2 - 2 \cdot -4733.382$

≈ 308.69

$\Rightarrow$ Varianz vergrößert sich, aber deutlich niedriger als erwartet!

Sind die ZVs korreliert?

$$Korr(G_{A_1}, G_{A_2}) = \frac{Kov(G_{A_1}, G_{A_2})}{\sqrt{\mathbb{V}(G_{A_1})\,\mathbb{V}(G_{A_2})}}$$

≈ -0.116

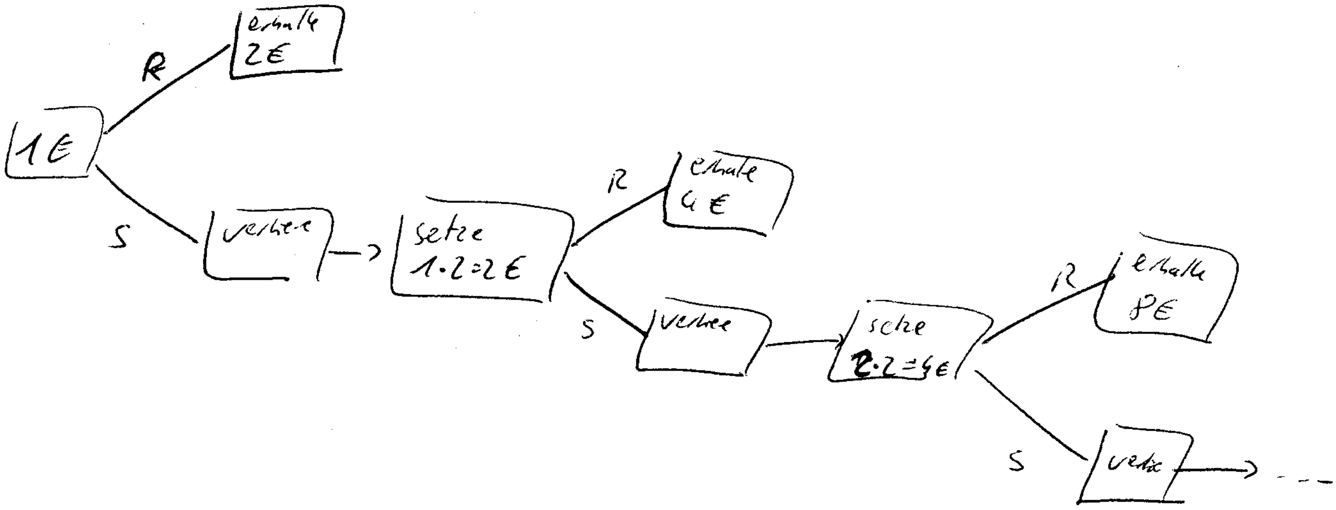
$\Rightarrow$ negativer Zusammenhang!

(1.)

Nun haben wir, da wir 18 Rote und 18 Schwarze Felder haben für $G = \{\text{Setze Rot und gewinne}\}$

$$P(G) = \frac{1}{2}$$

Der Spieler setzt zu Beginn 1 €. Das Spiel lässt sich wie folgt beschreiben.



(4)

	Spieler setzt	Bisherige Einsatz	Erhält als Auszahlung	Gewinn
	1	1	2	$2-1=1$
	2	3	4	$4-3=1$
	4	7	8	$8-7=1$
	8	15	16	$16-15=1$
	⋮	⋮	⋮	⋮
Formel	$1\cdot 2^{j-1}$	$\sum_{k=1}^{j} 1\cdot 2^{j-1}$	2^{j}	$2^{j}-\sum_{k=1}^{j} 2^{j-1} = 1$

Der Spieler erhält also im Fall von Rot garantiert $1€$!

Problem: Er muss genug Geld für diese Strategie haben!

(b) Sei T die Wartezeit, die vergeht, bis der Spieler gewinnt.

Da $\mathbb{P}(\text{"Rot"}) = \frac{1}{2}$ ist $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, denn es wird sicher in endlicher Zeit Rot fallen.

Was ist $\mathbb{E}[T]$?

Betrachte T_1 als die Wartezeit eine Auszahlung von 1 zu erhalten
T_2 als die Wartezeit eine Auszahlung von $2 \cdot 1$ zu erhalten
$\vdots$

Dann gilt 1) $\mathbb{E}[T_1] = \underbrace{0.5 \cdot 1}_{\text{Erfolg}} + \underbrace{0.5 \cdot (1 + \mathbb{E}[T_2])}_{\text{Warte auf } T_2}$

2) $\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_1]$ wg. Linearität

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[T_1] = 0.5 + 0.5\,(1 + 2 \cdot \mathbb{E}[T_1]) = 1 + \mathbb{E}[T_1]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[T_1] = \infty \quad \Rightarrow \mathbb{E}[T_2] = \infty \quad \Rightarrow \mathbb{E}[T_k] = \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \infty$

Man muss also im Mittel ∞-lange warten!

Das geht auch mathematisch:

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}^k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

T_i Wartezeit für erfolg in i-ten Zug

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} T_i\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[T_i]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

(c) Sei G_N der Gewinn nach N-Durchgängen. Da die Verteilen unabhängig von der vorherigen Runde sind gilt für $e_j = 2^{j-1}$ als gesetzte Einsätze in Runde j

$$G_N = \sum_{j=1}^{N} G_j \quad \text{mit } G_j \text{ Gewinn in Runde } j$$

$$\mathbb{E}[G_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} G_j\right] \overset{\text{lin}}{=} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}[G_j] = \sum_{j=1}^{N} e_j \cdot \mathbb{P}(\text{„Rot"}) + (1-\mathbb{P}(\text{„Rot"}))\cdot(-e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} 0.5 \cdot e_j + 0.5(-e_j) = \sum_{j=1}^{N} 0 = \underline{0}$$

Der erwartete Gewinn nach N-Runden ist 0

Für $\mathbb{V}[G_n]$ betrachten wir alle möglichen Rot-Schwarz Kombinationen einer Reihenlänge N. Diese definieren den Grundraum.

$$\Omega_N = \{\omega_{N,1}, \ldots \omega_{N,2}\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\{\omega_{N,i}\}) = \frac{1}{2^N}$$

$$\mathbb{V}[G_N] = \sum_{x=-2^N-1}^{N} \mathbb{P}(G_N = x)\,(x - \mathbb{E}[G_N])^2 = \sum_{x=-2^N-1}^{N} \mathbb{P}(G_N = x)\,x^2$$

$$= \sum_{x=-2^N-1}^{N} \left(\sum_{i: G_N(\omega_{N,i}) = x} \mathbb{P}(\{\omega_{N,i}\})\right) \cdot x^2 = \sum_{i=1}^{2^N} \mathbb{P}(\{\omega_{N,i}\})\, G_N(\omega_{N,i})^2$$

$$= \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} G_N(\omega_{N,i})^2$$