A1

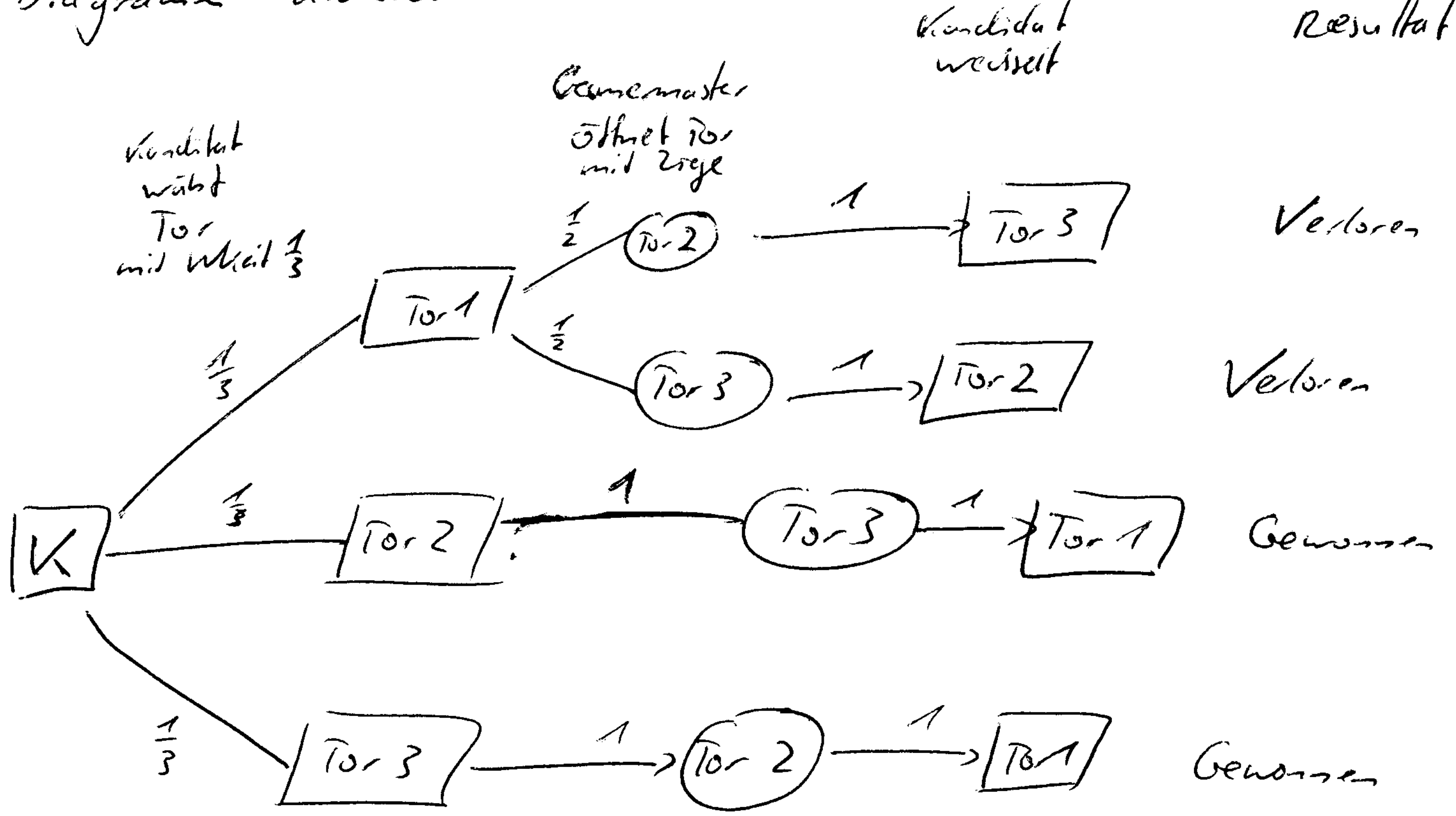
Erinnerung Auto-Ziege-Standard

OE: $\boxed{A}$ $\boxed{Z}$ $\boxed{Z}$

1 2 3

Ohne tauschen entscheidet Kandidat sich direkt für ein Tor $\Rightarrow \mathbb{P}(\text{"Auto gewinnt"}) = \frac{1}{3}$

Die Strategie mit tauschen lässt sich durch folgendes Diagramm darstellen



$$\mathbb{P}(\text{Gewinn} \mid \text{Tauschen}) = \overset{(\cdot 1 \cdot 1)}{\frac{1}{3}} + \overset{(\cdot 1 \cdot 1)}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$[\mathbb{P}(G \mid T)]$

Tor 2 gewählt   Tor 3 gewählt

Auch $\mathbb{P}(\text{Verliert} \mid \text{Tauschen}) = \frac{1}{3}$ ist im Prinzip durch ersten Zug festgelegt!

$$\mathbb{P}(V \mid T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Nun zur Aufgabe

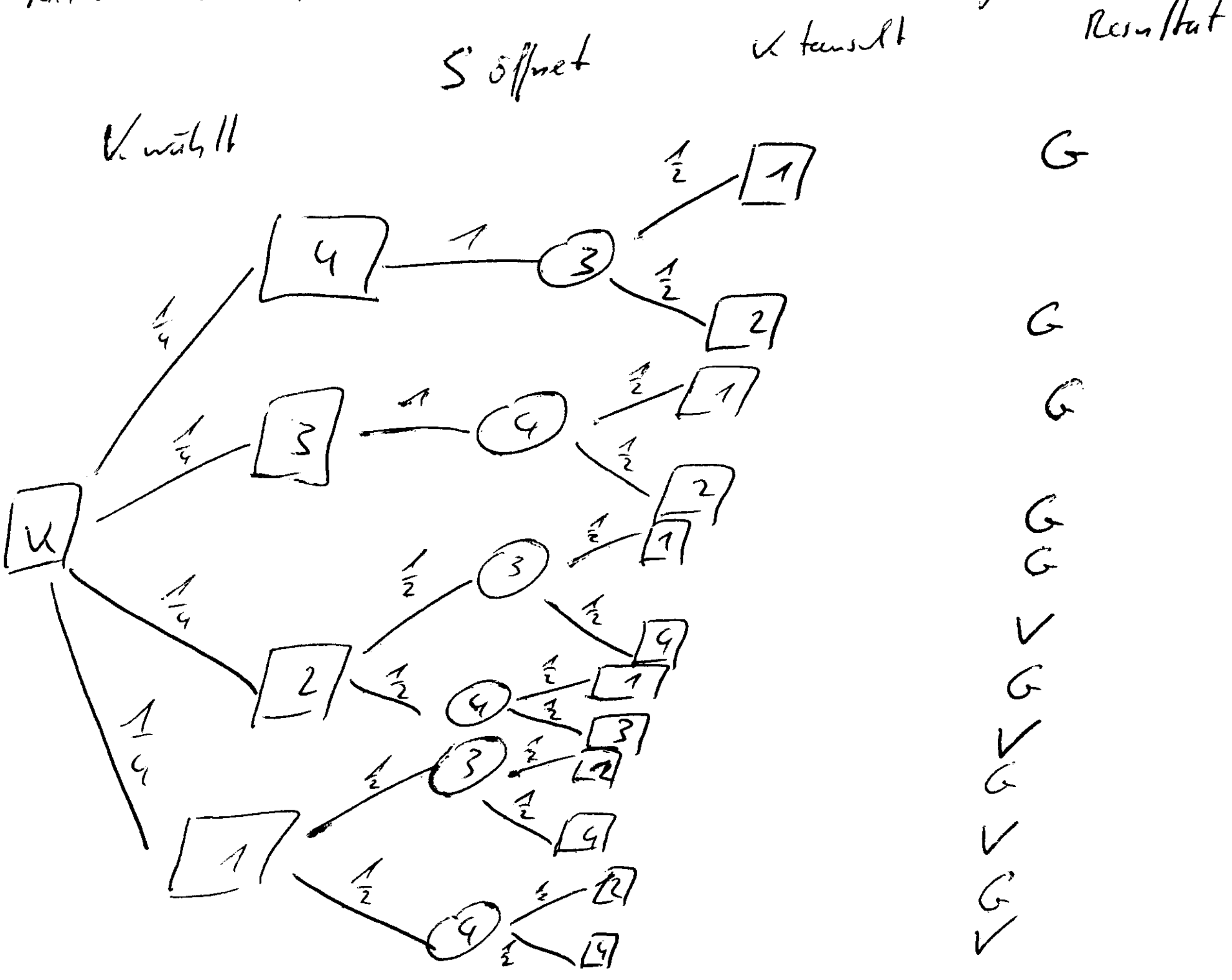
a) o.E.

A	A	Z	Z
1	2	3	4

Bei Strategie ohne tauschen entscheidet wieder erster Zug direkt

$$\Rightarrow \mathbb{P}(G \mid T^c) = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Mit tauschen haben wir folgendes Diagramm:



Also ist entk. T4   entl. T3

$$\mathbb{P}(G \mid T) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} > \frac{1}{2}$$

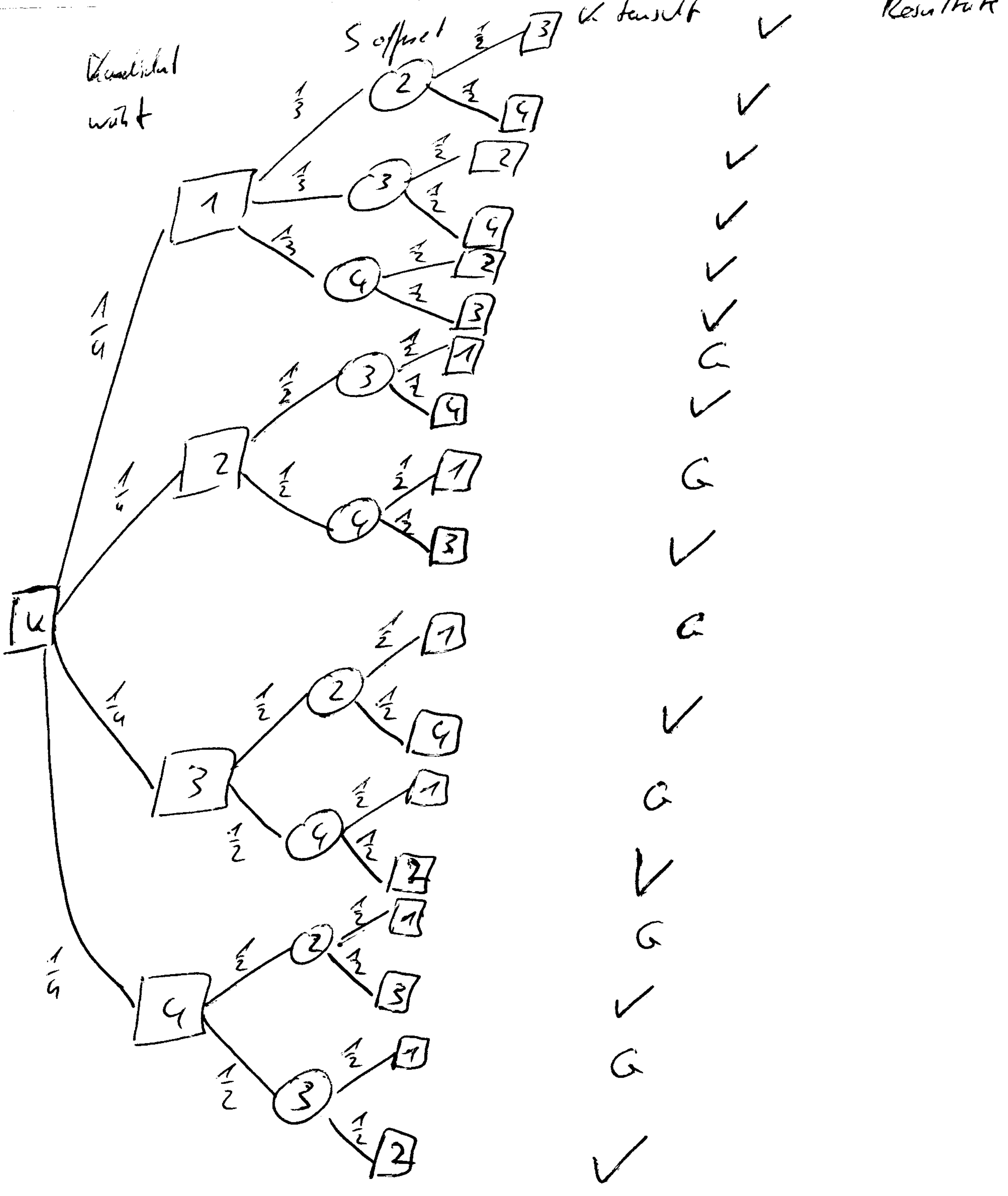
b) Hier haben wir o.E

$\boxed{A}$	$\boxed{Z}$	$\boxed{Z}$	$\boxed{Z}$
1	2	3	4

Wir können die Wkeit $\mathbb{P}(G \mid T^c)$ wieder direkt ablesen:

$$\mathbb{P}(G \mid T^c) = \frac{1}{4}$$

Für die Wkeit unter der Strategie haben wir folgendes Diagramm:



$$P(G \mid T) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 6\cdot\frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \underline{\frac{3}{8}} > \frac{1}{4}$$

(A2)

a) $p(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{\{x=1\}} + \frac{1}{3} \mathbb{1}_{\{x=3\}} + \frac{1}{6} \mathbb{1}_{\{x=-1\}} + \frac{3}{12} \mathbb{1}_{\{x=2\}}$

Also

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in \{1,3,-1,2\} = I} i \, p(i)$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot -1\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 1\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot 2\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{6}{12} + 1$$

$$= -\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} + \frac{12}{12}$$

$$= \underline{\frac{19}{12}}$$

Nun gilt $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Berechne $\mathbb{E}[X^2]$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i \in I} i^2 \, p(i)$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 1\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot 4\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 9\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1 + 3$$

$$= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{12}{12} + \frac{36}{12} = \frac{53}{12}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X] = \frac{53}{12} - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{53}{12} - \frac{361}{144} = \frac{636}{144} - \frac{361}{144} = \underline{\underline{\frac{275}{144}}}$$

b) $p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad , x \in \mathbb{N}_0$

Also

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{= \exp(\lambda)}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \, e^{-\lambda+\lambda} = \lambda \, e^0 = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\boxed{(*) \quad x + (x-1)x = x + x^2 - x = x^2}$$

$$\stackrel{(*)}{=} e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \left(x \frac{\lambda^x}{x!} + (x-1)x \frac{\lambda^x}{x!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} \right)$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \cdot \underbrace{\sum_{x=1} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{= e^{\lambda}} + e^{-\lambda} \lambda^2 \underbrace{\sum_{x=2} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}}_{= e^{\lambda}}$$

$$= \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda + \lambda^2 - (\lambda)^2 = \underline{\underline{\lambda}}$$

c)

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \quad , x \in \mathbb{R} \; , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, dx$$

$$= \lambda \int^{\infty} x e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \lambda \left(\left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \, dx \right)$$

$$= +\frac{\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

$f(x) = x$
$g'(x) = e^{-\lambda x}$
$\Rightarrow \quad f'(x) = 1$
$g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$
denn $g'(x) = -\lambda \cdot -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$
$= e^{-\lambda x}$

Nun gilt $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \lambda \left(\left[x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) dx \right)$$

$$= +\frac{2\lambda}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \, dx \overset{s.o.}{=} \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \, dx}_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$f(x) = x^2$
$g'(x) = e^{-\lambda x}$
$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x$
$g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

$$\Rightarrow \quad V[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

A3 9/10

a) $X_i \sim Bin(1,\frac{1}{2}) = Ber(\frac{1}{2}) \Rightarrow p(i) = \frac{1}{2}^i (1-\frac{1}{2})^{1-i}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i\in\{0,1\}} i \cdot p(i)$$

$$= 0 \cdot \left[\frac{1}{2}^0 (1-\frac{1}{2})^{1-0}\right] + 1 \cdot \left[\frac{1}{2}^1 (1-\frac{1}{2})^{1-1}\right]$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{i\in\{0,1\}} i^2 \cdot p(i) = 0 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Bem: $(\frac{1}{2}) \cdot (1-\frac{1}{2})$
$p(1-p)$
gilt für $p \in (0,1)$ bel.!

b) Nach Vorlesung ist bekannt, dass Summen Binomial-verteilte ZVars wieder Binomialverteilt sind

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, \frac{1}{2})$$

c) $\mathbb{E}[\frac{Y}{n}] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] \overset{\text{Lin}}{\underset{\text{const.}}{=}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \overset{\text{ident.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_1]$

$$= \frac{1}{n} n \cdot \mathbb{E}[X_1] \quad (= \underline{p}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\mathbb{V}[\frac{Y}{n}] = \mathbb{V}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] \overset{\text{Regel } \mathbb{V}}{=} \frac{1}{n^2} \mathbb{V}[\sum_{i=1}^n X_i] \overset{\text{unk.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i]$

$$\overset{\text{ident.}}{=} \frac{1}{n^2} n \cdot \mathbb{V}[X_1] = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{(p(1-p))} = \underline{\underline{\frac{1}{4n}}}$$

d) Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \notin \left[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right] \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{2} - \varepsilon\right\} \text{ oder } \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{1}{2} + \varepsilon\right\} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2} \leq -\varepsilon \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\Big| \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}}_{= Y_n} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{= \mathbb{E}[Y_n]} \Big| \geq \varepsilon \right) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\mathbb{V}[Y_n]}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4n}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 4n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Also ist die Wkeit, dass $\frac{1}{n}\sum X_i$ für n groß um $\varepsilon > 0$ von $\frac{1}{2}$ abweicht sehr klein!

$\Longrightarrow$ LLN im Spezialfall $\mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$