Diffusionsprozesse und lineare stochastische Differentialgleichungen

Michele Bieber

Projektbericht im Rahmen des Seminars Grundlagen der Simulation und Statistik von dynamischen Systemen

Sommersemester 2012

Prof. Dr. Christine Müller

02. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Bericht dient im Rahmen des Seminars, Grundlagen der Simulation und Statistik von dynamischen Systemen, der Erläuterung verschiedener Methoden zur Behandlung der Dynamik von Systemen, deren zeitliche Entwicklung vom gegenwärtigen Zustand abhängt.
Im Allgemeinen beschreiben solche Systeme ein Verhalten, dass in den Naturwissenschaften oder auch in der Finanzmathematik beobachtet wird, wie z.B. der Verlauf eines Aktienkurses oder der Teilchenbewegung beim Mischen zweier verschiedener Stoffe. Ein solcher Verlauf hat den Charakter, dass er zu verschiedenen Zeitpunkten erfasst wird und oft noch zusätzlich vom Zufall abhängt.
Ein Beispiel solcher Systeme sind Diffusionsprozesse. Um die Dynamik eines Diffusionsprozesses mathematisch zu beschreiben, eignen sich im Allgemeinen stochastische Differentialgleichungen. Sie werden auf unterschiedlichen Gebieten der mathematischen Modellierung genutzt, um die hier beschriebenen Prozesse zu simulieren, die außerdem durch stochastische Störfaktoren beeinflusst werden. Ein Ziel ist es hier, den Verlauf eines Diffusionsprozesses, anhand der Ableitung der zugehörigen stochastische Differentialgleichungen, zu beschreiben. Zu dieser Problematik existieren viele Lösungsmethoden. Im Folgenden werden hierzu Formeln vorgestellt. Die Resultate, die anhand dieser Formeln gewonnen werden, sind einleitend für die Implementierung von Simulationen in der statistischen Programmsoftware R und darüber hinaus, die Basis vieler statistischer Schätzmethoden.
In diesem Bericht werden zunächst in Kapitel 2 die Diffusionsprozesse eingehend motiviert und erklärt. Hierbei liegt der Fokus auf der mathematischen Darstellung des Diffusionsprozesses über eine stochastische Differentialgleichung. Außerdem wird in diesem Kapitel die Theorie der Markoveigenschaft erläutert und im Hinblick auf die Diffusionsprozesse erklärt. Im Anschluss erfolgt in Kapitel 3 die Theorie zu den behandelnden Lösungsansätzen der stochastischen Differentialgleichungen und den linearen stochastischen Differentialgleichungen. Insbesondere wird hier die Ito-Formel als Methode zum Beweisen einer Lösung erläutert. Der spezielle Fall der

Ito-Formel für eine Brownsche Bewegung wird hier ebenso aufgeführt und anhand vom einem Beispiel erläutert. Kapitel 4 enthält das Fazit, welches die wichtigsten Aussagen zusammenfasst und die vorgestellten Formeln resümiert.

2 Diffusionsprozesse und ihre Anwendungen

2.1 Diffusionsprozesse

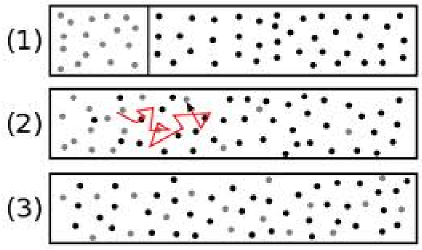
2.1.1 Motivation

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, befasst sich dieser Bericht mit Diffusionsprozessen, die mathematisch formuliert werden, anhand einer stochastischen Differentialgleichung.
Im Allgemeinen besitzen die Diffusionsprozesse die Eigenschaft, dass ihre zeitlich geordnete Entwicklung vom gegenwärtigen Zustand abhängt. Der Zustandsraum kann hier diskret oder stetig sein. Die Parametermenge ist stetig, da sie ein Zeitintervall beschreibt. Eine weitere Eigenschaft ist, dass Diffusionsprozesse die Markoveigenschaft besitzen. Eine genauere Definition der Markoveigenschaft wird in dem Unterabschnitt 2.3 gegeben. Die Diffusionsprozesse gehören der Klasse der stochastischen Prozesse $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ an, angepasst an eine Filtrierung $\Im_t := \sigma(X_s : s \leq t)$. Hierbei wird $(\Im_t)_{t \geq 0}$ durch die Brownsche Bewegung erzeugt.
Um den **Verlauf eines Diffusionsprozesses** zu ermitteln, wird dieser über eine stochastische Differentialgleichung formuliert. Die hier thematisierten Prozesse sind dann **Lösungen** der stochastischen Differentialgleichung (Iacus, 2008, S.33)

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \text{ mit Anfangsbedingung } X_0.$$

Dieser Sachverhalt und die genannte stochastische Differentialgleichung werden im Unterabschnitt 2.2 genauer erläutert.

Ein Beispiel für einen Diffusionsprozess ist ein physikalischer Prozess, der eine ungleichmäßige Verteilung von Teilchen aufzeichnet, deren Verlauf beim Mischen zweier Stoffe beobachtet wird.



Bildquelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Diffusion

Abbildung 1: Verlauf von Teilchen beim Vermischen zweier Stoffe durch Diffusion

Anhand von Abbildung 1 kann nachvollzogen werden, dass die Teilchen einer ständigen Wechselwirkung mit anderen Teilchen unterliegen. Dies nimmt Einfluss auf die Bewegungsrichtung eines Teilchens. Die Richtungsänderung, also der Verlauf eines Teilchens, ändert sich somit fortlaufend. Das hat zur Folge, dass die Diffusionsprozesse einem Verlauf folgen, der eine Zufallskomponente enthält. Im Allgemeinen werden Diffusionsprozesse, neben der Physik auch in der Biologie, der Chemie und den Wirtschaftswissenschaften angewendet. Sie sind ein Hilfsmittel, um die dynamischen Systeme, die in diesen Wissenschaften beobachtet werden, zu umschreiben.

2.1.2 Definition Diffusionsprozess

Seien σ mit $(t,\omega) \mapsto \sigma(t,X_t(\omega))$ und b mit $(t,\omega) \mapsto b(t,X_t(\omega))$ messbare stochastische Prozesse mit der Eigenschaft, dass $\int_0^t \sigma^2(u,X_u) + |b(u,X_u)|du \lneq \infty$ fast sicher $\forall t \geq 0$. Weiter sei $W : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $(t,\omega) \mapsto W(t)(\omega)$ eine Brownsche Bewegung. Dann heißt der Prozess X mit

$$X_t = \int_0^t \sigma(u,X_u)dW_u + \int_0^t b(u,X_u)du \text{ für } t \geq 0$$

ein verallgemeinerter **Diffusionsprozess** mit **Diffusionskoeffiezenten** σ und **Drift** b (Klenke, 2006, S.537). Ein Diffusionsprozess besteht somit aus dem gewöhnlichen Riemann- und dem Ito- Integral, dass angetrieben wird durch eine Brownsche Bewegung. Sind σ und b

Abbildungen der Art $\tilde{\sigma} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $\sigma_t = \tilde{\sigma}(X_t)$ und $\tilde{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, b_t = \tilde{b}(X_t)$, so sagt man X sei ein **Diffusionsprozesse im engeren Sinnne**. In diesem Bericht werden Diffusionsprozesse behandelt, die Lösungen der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t \text{ mit Anfangsbedingung } X_0$$

sind. Es sei zu erwähnen, dass die hier definierten Diffusionsprozesse eine Abgrenzung auf den **eindimensionalen Fall** sind, angetrieben durch eine Brownsche Bewegung und nicht etwa durch einen Levy-Prozess, wie für multivariate Diffusionsprozesse üblich.

2.1.3 Problemstellung

Generell soll ein Zusammenhang zwischen dem Wert einer Funktion und ihrem zukünftigen Verlauf in einer Gleichung ausgedrückt werden. Prinzipiell wird dazu die Ableitung der Funktion bestimmt. Problematisch wird es, wenn die zu betrachtende Funktion nicht differenzierbar ist, wie es der Fall bei den hier behandelten Diffusionsprozessen ist. Diese sind aufgrund ihrer Zuwächse der Brownschen Bewegung an keiner Stelle differenzierbar.
Dieses Problem kann umgangen werden, indem die stochastische Differentialgleichung über ihre zugehörige Integralgleichung formuliert wird. Die Integralgleichung besitzt den Vorteil, dass sie ohne explizite Darstellung der Ableitung auskommt.

2.2 Stochastische Differentialgleichung eines Diffusionsprozesses

2.2.1 Motivation

Im Folgenden werden die stochastischen Differentialgleichungen erläutert, mit der Intention, die beschrieben Diffusionsprozesse über diese auszudrücken.
Ein Beispiel hierfür sind die Black-Scholes-Differentialgleichungen. Sie beschreiben ein finazmathematisches Modell zur Analyse von Finanzsachverhalten (z.B. Aktienkurse). Die zugehörige stochastische Differentialgleichung lautet

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Dies ist eine homogene, lineare stochastische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $b(t) = \mu$ und $\sigma(t) = \sigma$, also ein spezieller Fall der stochastischen Differentialgleichung. Hier beschreibt dS_t den Verlauf des Aktienkurses zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$. Der Term W_t sei eine Brownsche Bewegung und μ die erwartete Rendite.
Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung ist eine geometrische Brownsche Bewegung. (wikipedia.org/wiki/Black-Scholes-Modell (5. Mai 2012)). Dieses Resultat wird im Abschnitt 3.2 mit der Ito-Formel hergeleitet.

2.2.2 Definition stochastische Differentialgleichung

Gegeben sei eine **stochastische Differentialgleichung** der Form

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \text{ mit Anfangsbedingung } X_0 = Z.$$

Hierbei sei $W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $(t, \omega) \mapsto W(t)(\omega)$ eine Brownsche Bewegung und Z eine von W unabhängige Zufallsvariable mit Verteilung μ.
Weiter seien die Abbildungen b mit $(t, \omega) \mapsto b(t, X_t(\omega))$ und σ mit $(t, \omega) \mapsto \sigma(t, X_t(\omega))$ messbar.
Dann ist eine Lösung X der stochastischen Differentialgleichung ein stetiger stochastischer Prozess, der die Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u))du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u \text{ f.s. } \forall t \geq 0$$

erfüllt. Das Integral $\int_0^t b(u, X_u)du$ ist das gewöhnliche Riemann-Integral und $\int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u$ das Ito-Integral.
Gesucht ist also ein Prozess, der zusammen mit b, σ und W die obige Integralgleichung erfüllt (Klenke, 2006, S.551).
Die hier thematisierten Diffusionsprozesse **lösen** die stochastische Differentialgleichung.

2.3 Markoveigenschaft und Kolmogorov Vorwärts-/Rückwärtsgleichungen

2.3.1 Markoveigenschaft

Die hier thematisierten Diffusionsprozesse besitzen die **Markoveigenschaft**. Dieses Resultat vereinfacht zum einen viele Berechnungen in der Parametrik und Nichtparametrik und zum an-

deren ist es nützlich im Umgang mit Simulationsalgorithmen.
Die Markoveigenschaft bezeichnet die Eigenschaft von stochastischen Prozessen, dass Prognosen, die auf der letzten Beobachtung basieren ebenso gut sind, wie Prognosen, die auf allen vorangegangen Beobachtungen basieren. Formal ausgedrückt

$\forall 0 \leq t_0 \lneq \ldots \lneq t_{n+1}, x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}:$

$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$

Es heißt die Diffusionsprozesse sind gedächnislos. Stochastische Prozesse, in deren Zustandsraum stetige Werte angenommen werden und die die Markoveigenschaft besitzen, werden auch als **Markovprozesse** bezeichnet. Für einen diskreten Zustandsraum formuliert man die stochastischen Prozesse als **Markovkette** (Klenke, 2006, S.333) .
Für Markovprozesse ist es üblich, die Übergangsdichte $p(t,y|s,x)$ anzugeben (Iacus, 2008, S.36). Hierbei werden die Wahrscheinlichkeiten eines Zustandes y zum Zeitpunkt t, bedingt des Zustandes x zum Zeitpunkt s, beschrieben. Eine alternative Formulierung wäre $p(t-s,y|x)$, diese kann in manchen Fällen die Berechnungen vereinfachen.

2.3.2 Kolmogorov Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

Da die Diffusionsprozesse die Markoveigenschaft besitzen ist es möglich die Übergangsdichte zu definieren. Die Übergangsdichte hat die Eigenschaft, dass sie die **Kolmogorov Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen** erfüllt. Diese Gleichungen gehören zu den linearen partiellen Differentialgleichungen und brechen für Markovprozesse nach der zweiten Ordnung ab.
Die Kolmogorov Vorwärtsgleichung lautet (Iacus, 2008, S.36)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,y|s,x) = -\frac{\partial}{\partial y}(b(t,y)p(t,y|s,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(t,y)p(t,y|s,x))$$

und die Kolmogorov Rückwärtsgleichungen

$$-\frac{\partial}{\partial s} p(t,y|s,x) = b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} p(t,y|s,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t,y|s,x).$$

Die Gleichungen stellen eine Beziehung zwischen dem Diffusionskoeffizienten $\sigma(.)$ und dem Drift $b(.)$ her. Diese Resultate haben ihre Anwendungen in Simulationsalgorithmen , in der Parametrik und Nichtparametrik.

3 Ito-Formel und ihre Anwendungen

3.1 Ito-Formel

Die hier aufgeführten Diffusionsprozesse/stoch. Prozesse setzen sich zusammen aus dem gewöhnlichen Riemann- und dem **Ito-Integral**. Da das Ito-Integral nicht ganz einfach zu berechnen ist, eignet sich die Anwendung der **Ito-Formel**.

Darüber hinaus ist sie ebenso ein wichtiges Instrument in stochastischen Berechnungen und beweist zum Beispiel, dass die geometrische Brownsche Bewegung, eine Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung ist, oder die in 3.2 formulierten Lösung, eine Lösung der stochastischen linearen Differentialgleichung darstellt. Zudem wird die Ito-Formel somit auch in vielen Simulationen verwendet. Im Allgemeinen ist die Ito-Formel als Kettenregel für stochastische Prozesse anzusehen. Sie entsteht durch die stochastische Taylorentwicklung 2. Ordnung, einer Funktion $f(X)$, wobei hier X ein Diffusionsprozess ist.

Wiederholung Taylor-Formel (Eindimensional):

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}$, so dass gilt $x + t\xi \in U \ \forall t \in [0,1]$. Sei weiter $f : U \to \mathbb{R}$eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.

Dann gilt (Forster, 1999, S. 56): $\exists\, \theta \in [0,1]$mit $f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$

Ito-Formel:

Unter der Voraussetzung, dass $f(t,x)$ eine in beiden Variablen zweimal differenzierbare Funktion ist, wobei x die Realisation der Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $w \mapsto X(w) = x$ ist, gilt (Iacus, 2008, S. 38):

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_t(u,X_u)du + \int_0^t f_x(u,X_u)dXu + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u,X_u)(dX_u)^2$$

Dabei sind $\frac{\partial(f,x)}{\partial t} = f_t(t,x)$, $\frac{\partial(f,x)}{\partial x} = f_x(t,x)$ und $\frac{\partial(f,x)}{\partial x^2} = f_{xx}(t,x)$ die Terme der partiellen Ableitungen in der Taylor- Formel. Die äquivalente Differentialform lautet

$$df(t,X_t) = f_t(t,X_t)dt + f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X_t)(dX_t)^2.$$

Hierbei kann der Punkt $(0, X_0)$ als Entwicklungspunkt angenommen werden.
In dem Buch wird auf den Beweis der Ito- Formel verzichtet. Zum besseren Verständnis für die Anwendungen wird dieser hier aufgeführt.

Beweis: Setze $\xi_1 = (t-s)$, $\xi_2 = (x-x_0)$ und $k=2$ in der Taylorformel. Weiter seien $\delta, \lambda \in [0,1]$, so dass gilt:

$$f(t,x) - f(s,x_0) = [f(t,x) - f(s,x)] + [f(s,x) - f(s,x_0)]$$
$$\overset{Taylor}{=} f_t(s+\delta(t-s),x)(t-s) + f_x(s,x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(s,x_0+\lambda(x-x_0))(x-x_0)^2$$

Partition des Intervalls ergibt:
$f(t,X_t) - f(0,X_0)$
$= \sum_{i=1}^n f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})$
$= \sum_{i=1}^n [f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_i})] + \left[f(t_{i-1}, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\right]$
$= \sum_{i=1}^n f_t(t_{i-1} + \delta_i(t_i - t_{i-1}), X_{t_i})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n f_x(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) +$
$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f_{xx}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}} + \lambda_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}))(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$

Nach Definition des Riemann (Walter, 2004, S.202)- und dem Stochastischen (Voit, SS 2004, (3.20))- Integral folgt:
$\underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t f_t(u, X_u)du + \int_0^t f_x(u, X_u)dXu + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u, X_u)(dX_u)^2$
$\Rightarrow f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int f_t(u,X_u)du + \int_0^t f_x(u,X_u)dX_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u,X_u)(dX_u)^2$,
und die obige Ito-Formel ist gezeigt.

3.1.1 Ito-Formel der Brownsche Bewegung

Es sei hier zusätzlich zu erwähnen, dass die Terme $(dt \cdot dW_t)$ und $(dt)^2$, Terme der Ordnung $\mathcal{O}(dt)$ sind. D.h. bei der Entwicklung nach dem Term $(dX_t)^2$ können somit die Terme $(dt \cdot dW_t)$ oder $(dt)^2$ unbeachtet bleiben. Darüber hinaus verhalten sich Terme der Ordnung $(dW_t)^2$ für eine Brownsche Bewegung wie dt, da $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \approx t_i - t_{i-1}$. Das hat den Vorteil, dass der Term $(dW_t)^2$ in der stochastischen Differentialgleichung ersetzt werden kann durch dt, was die Berechnungen wesentlich vereinfacht. Betrachte hierzu folgendes Beispiel:
Für den speziellen Fall, dass X_t die Brownsche Bewegung ist, vereinfacht sich die in 3.1 genannte Integralgleichung (Iacus, 2008, S.38) zu
$f(t,W_t) = f(0,0) + \int_0^t f(u,W_u)du + \int_0^t f_x(u,W_u)dW_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u,W_u)\,(dW_u)^2$

$= f(0,0) + \int_0^t f(u,W_u)du + \int_0^t f_x(u,W_u)dW_u + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u,W_u)du$

$= f(0,0) + \int_0^t [f_t(u,W_u) + \frac{1}{2} f_{xx}(u,W_u)]du + \int_0^t f_x(u,W_u)dWu$

mit zugehöriger Differentialgleichung

$df(t,W_t) = f(t,W_t) - f(0,0)$

$= \left(f_t(t,W_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,W_t)\right) dt + f_x(t,W_t)dW_t$

Dies ist die Ito-Formel der Brownschen Bewegung.

Betrachte nun die einfache Funktion mit $f(t,x) = f(x) = x^2$, also approximiere mit einem Polynom zweiten Grades. Dann ergibt sich unter der Annahme der Brownschen Bewegung mit der Ito- Formel

$f(W_t) = f(0) + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(W_u)du + \int_0^t f_x(W_u)dW_u$

$\Rightarrow W_t^2 = 0^2 + \frac{1}{2}\int_0^t 2du + \int_0^t 2W_u dW_u$

$\Rightarrow \frac{1}{2}W_t^2 = \frac{1}{2}\int_0^t 1du + \int_0^t W_u dW_u \Rightarrow \int_0^t W_u dW_u = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$

Das Integral kann anhand von $\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ einfach gelöst werden.

3.2 Lineare stochastische Differentialgleichungen

3.2.1 Herleitung einer Lösung einer linearen stochastischen Differentialgleichung

Das Konzept der Ito-Formel ist hilfreich um eine Lösung der hier aufgeführten linearen stochastischen Differentialgleichung zu beweisen.

Homogene Version:

Betrachte die homogene lineare stochastische Differentialgleichung $dX_t = b_1(t)X_t dt + \sigma_1(t)X_t dW_t$. Diese Gleichung wird auch stochastische Differentialgleichung mit multiplikativen Rauschen genannt. Zum Lösen dieser Gleichung bzw. zum Beweis der vermuteten Lösung, kann die Ito-Formel verwendet werden, indem man $f(t,x) = f(x) = log(x)$ wählt. Die **homogene Lösung** lautet somit nach Iacus (2008, S.39):

$$X_t = X_0 exp\left(\int_0^t (b_1(u) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(u))du + \int_0^t \sigma_1(u)dW_u\right).$$

Beweis:

Für $f(t,x) = f(x) = log(x)$ ergeben sich die partiellen Ableitungen $f_t(x) = 0$, $f_x(x) = \frac{1}{x}$ und $f_{xx}(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Durch Einsetzen der Terme in die Ito-Formel folgt:
$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f_t(u,X_u)du + \int_0^t f_x(u,X_u)dXu + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(u,X_u)(dX_u)^2$
$\Rightarrow ln(X_t) = ln(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_u} dXu - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_u^2}(dX_u)^2$

$$\Rightarrow ln(X_t) \overset{(*)}{=} ln(X_0) + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{X_u}(b_1(u)X_udu + \sigma_1(u)X_udW_u)}_{I)} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^t \frac{1}{X_u^2}(b_1(u)X_udu + \sigma_1(u)X_udW_u)^2}_{II)}$$

$I)\ \int_0^t \frac{1}{X_u}(b_1(u)X_udu + \sigma_1(u)X_udW_u) = \int_0^t b_1(u)du + \sigma_1(u)dW_u$
$II)\ \int_0^t \frac{1}{X_u^2}(b_1(u)X_udu + \sigma_1(u)X_udW_u)^2 = \int_0^t \frac{1}{X_u^2}(b_1^2(u)X_u^2(du)^2 + 2b_1(u)\sigma_1(u)X_u^2(du \cdot dW_u) + \sigma_1^2(u)X_u^2(dW_u)^2) \overset{(**)}{=} \int_0^t \frac{1}{X_u^2}(\sigma_1^2(u)X_u^2du) = \int_0^t \sigma^2(u)du$

$\Rightarrow ln(X_t) = ln(X_0) + \int_0^t b_1(u)du + \sigma_1(u)dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u)du$
$\Rightarrow ln(X_t) = ln(X_0) + \int_0^t \left(b_1(u) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)du + \int \sigma_1(u)dW_u$
$\Rightarrow X_t = X_0 + exp\left(\int_0^t \left(b_1(u) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)du + \int \sigma_1(u)dW_u\right)$

$(*)\ dX_t = b_1(t)X_tdt + \sigma_1(t)X_tdW_t$
$(**)(dt \cdot dW_t)$, $(dt)^2$ Terme der Ordnung $\mathcal{O}(dt)$, fallen somit nach Entwicklung von $(X_t)^2$weg und $(dW_t)^2$ verhält sich wie dt

3.2.2 Spezialfall geometrische Brownsche Bewegung

Für die Resultate einer homogenen linearen stochastischen Differentialgleichung ist die geometrische Brownsche Bewegung S_t ein Spezialfall mit

$$dS_t = b_1(t)S_tdt + \sigma_1(t)S_tdW_t = \mu S_tdt + \sigma S_tdW_t.$$

Die Koeffizienten sind hier konstant.
Weiter sei darauf hingewiesen, dass im Allgemeinen die Ableitung einer stochastischen Differentialgleichung, für die geometrische Brownsche Bewegung, nicht ganz einfach zu bestimmen ist. Hierfür eignet sich ebenso die Anwendung der Ito- Formel.

Sei nun eine geometrische Brownsche Bewegung gegeben durch

$$S_t = S_0\, exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\} \text{ mit } t \gneq 0.$$

Wähle weiter $f(t,x) = S_0\, exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\}$, so dass $f(t,W_t) = S_t$ ist (Iacus, 2008, S39). Durch Anwenden der Ito- Formel, kann die nicht ganz triviale Ableitung berechnet werden. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$f_t(t,x) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) f(t,x), \qquad f_x(t,x) = \sigma f(t,x) \quad \text{und} \quad f_{xx}(t,x) = \sigma^2 f(t,x)$$

Einsetzen der Terme in die Ito- Formel der Brownschen Bewegung ergibt somit

$$\begin{aligned}
dS_t &= df(t,Wt) \\
&= \left(f_t(t,W_t) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(t,W_t)\right) dt + f_x(t,W_t) dW_t \\
&= \left((r - \tfrac{\sigma^2}{2})S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t\right) dt + \sigma S_t dW_t \\
&= \left(rS_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t\right) dt + \sigma S_t dW_t \\
&= rS_t dt + \sigma S_t dW_t
\end{aligned}$$

Dies beweist, dass die geometrische Brownsche Bewegung eine Lösung der oben formulierten Black-Scholes-Differentialgleichungen ist.

3.3 Lamperti-Transformation

Die Lamperti-Transformation ist eine besondere Anwendung der Ito-Formel. Sie kann in vielen Schätz- und Simulationsmethoden angewendet werden.

Unter der Annahme, gegeben sei eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

d.h. der Diffusionskoeffizient $\sigma(X_t)$ sei nur abhängig von der Zustandsvariablen X_t.
Dann ist es möglich die stochastische Differentialgleichung umzuformen, in eine stochastische Differentialgleichung mit einheitlichem Diffusionskoeffiezenten (Iacus, 2008, S.40). Hierzu wird die Lamperti- Transformation verwendet:

$$Y_t = F(X_t) = \int_z^{X_t} \frac{1}{\sigma(u)} du.$$

Dabei ist z ein frei wählbarer Wert aus dem Zustandsraum der Zufallsvariablen X.

Dieser Prozess löst die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dY_t = b_Y(t,Y_t)dt + dW_t$$

$$\text{mit } b_Y(t,y) = \frac{b(t,F^{-1}(y))}{\sigma(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2}\sigma_x(F^{-1}(y)) = \frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t).$$

Genauer ist dann $dY_t = b_Y(t,Y_t)dt + dW_t = \left(\frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t)\right)dt + dW_t$.
Um dieses aufgeführte Resultat zu beweisen, wird die Ito- Formel angewendet.

Beweis (Iacus, 2008, S. 41):

Setzte $f(t,x) = \int_z^x \frac{1}{\sigma(u)}du$ und erhalte die partiellen Ableitungen:

$$f_t(t,x) = 0 \qquad f(t,x) = \frac{1}{\sigma(x)} \qquad f_{xx}(t,x) = -\frac{\sigma_x(x)}{\sigma^2(x)}.$$

Einsetzen der Terme in die Ito-Formel (Differentialschreibweise) ergibt:

$$\begin{aligned}
dY_t &= df(t,X_t) \\
&= f_t(t,X_t)dt + f_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,X_t)(dX_t)^2 \\
&= 0 \cdot dt + \frac{1}{\sigma(X_t)}dX_t - \frac{1}{2}\frac{\sigma_x(X_t)}{\sigma^2(X_t)}(dX_t)^2 \\
&= \frac{1}{\sigma(X_t)}(b(t,X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t) - \frac{1}{2}\frac{\sigma_x(X_t)}{\sigma^2(X_t)}(b(t,X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t)^2 \\
&= \frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)}dt + dW_t - \frac{1}{2}\frac{\sigma_x(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\left(b^2(t,X_t)(dt)^2 + 2b(t,X_t)\sigma(X_t)(dt \cdot dW_t) + \sigma^2(X_t)(dW_t)^2\right) \\
&\overset{(\star\star)}{=} \frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)}dt + dW_t - \frac{1}{2}\frac{\sigma_x(X_t)}{\sigma^2(X_t)}\sigma^2(X_t)dt \\
&= \left(\frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t)\right)dt + dW_t \\
&\overset{(\star\star\star)}{=} b_Y(t,X_t)dt + dW_t
\end{aligned}$$

$(\star)$ $\quad dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$

$(\star\star)$ $\;(dt \cdot dW_t)$, $(dt)^2$ Terme der Ordnung $\mathcal{O}(dt)$, fallen somit bei Entwicklung nach $(X_t)^2$weg;
$(dW_t)^2$ verhält sich wie dt

$(\star\star\star)$ $b_Y(t,y) = \frac{b(t,F^{-1}(y))}{\sigma(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2}\sigma_x(F^{-1}(y)) = \frac{b(t,X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t)$

4 Zusammenfassung

Dieser Bericht befasste sich mit Diffusionsprozessen und deren mathematischer Darstellung, als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung. Genauer gesagt, wurde die Theorie und die Idee der Diffusionsprozesse erläutert. Darauf folgten verschiedene Lösungsansätze stochastischer Differentialgleichungen bzw. Spezialfälle dieser. Problematisch hierbei war, dass die Diffusionsprozesse und auch andere stochastische Prozesse, wie zum Beispiel die geometrische Brownsche Bewegung, an keiner Stelle differenzierbar sind. Diese Problematik wurde umgangen, indem die Integralgleichungen der Differentialgleichungen betrachtet wurden.
Weiter wurde in diesem Bericht die **Markoveigenschaft** des Diffusionsprozesses beschrieben und wie durch die Markoveigenschaft die **Kolmogorov Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen** verwendet werden können. Die Gleichungen stellen eine Beziehung zwischen dem Drift und dem Diffusionskoeffizienten her. Dieses Resultat ist wichtig, da es in Simulationsalgorithmen und darüber hinaus in der Parametrik und Nichtparametrik nützlich ist.
Der Fokus in diesem Bericht wurde auf die **Ito- Formel** gelegt. Um die Ito- Formel zu verstehen, wurde diese hergeleitet. Darüber hinaus wurden verschiedene Anwendungen der Ito-Formel aufgeführt, wie zum Beispiel das Beweisen der Lösung einer **homogenen linearen stochastischen Differentialgleichung** und der Beweis der Lösung der stochastischen Differentialgleichung, die anhand der **Lamperti- Transformation** gewonnen wird. Der spezielle Fall der Ito-Formel für eine Brownsche Bewegung wurde hier ebenso aufgeführt und anhand vom einem Beispiel erläutert.

5 Literaturverzeichnis

- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag. New York.
- Klenke, A. (2006). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Walter, W. (2004). *Analysis 1*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Forster, O. (1999). Analysis 2, 5. Auflage. Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden.
- Prof. Dr. M. Voit. (SS 2004). *Skript der Vorlesung Stochastik III (Stochastische Analysis und Finanzstochastik)*.TU-Dortmund.
- http://de.wikipedia.org/wiki/Diffusion (22. April 2010).