TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT STATISTIK

Wintersemester 2010/11
19.01.2011

Dr. Th. Ziebach | Dr. D. Wied | Dipl.-Stat. E. Lockow

Blatt 13

Übungen zur Vorlesung
Zeitreihenanalyse

Aufgabe 42 (Direkte Spektralschätzer)

Betrachten Sie erneut den stationären ARMA$(1,1)$-Prozess

$$X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} = \epsilon_t + \frac{1}{2}\epsilon_{t-1}.$$

(a) Simulieren Sie aus obigem Prozess eine Trajektorie mit $T = 300$ Beobachtungen. Zeichnen Sie außerdem das resultierende Periodogramm zusammen mit der Spektraldichte aus Aufgabe 41 in eine Grafik und kommentieren das Ergebnis.

(b) Das Periodogramm bildet einen Grundbaustein zur Konstruktion verbesserter Schätzer der Spektraldichte. Eine Glättung des Periodogramms mit Hilfe eines gleitenden Durchschnitts liefern direkte Spektralschätzer

$$\hat{f}(\lambda_j) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega(i) \cdot I_x\left(\lambda_j - \frac{2\cdot\pi\cdot k}{T}\right) \ ,$$

mit $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$ für $0 \leq j \leq [T/2]$. Ein einfacher Spektraldichteschätzer ist der Daniell-Schätzer, der über $M = 2m+1$ Periodogrammwerte mittelt, das heißt

$$\omega(i) = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} & \text{für} - m \leq k \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Glätten Sie die Periodogrammwerte aus a) mit diesem Schätzer bei geeigneter Wahl von M, zeichnen Sie den resultierenden Spektraldichteschätzer zusammen mit dem Periodogramm und der in a) bestimmten wahren Spektraldichte in eine Grafik und kommentieren die Ergebnisse.

Hinweise:
1. Zur Berechnung von Periodogrammen existieren in R bereits Funktionen, jedoch weicht die dort benutzte Definition des Periodogramms von der Definition aus der Vorlesung ab.
2. AR-Prozesse können mit dem R-Befehl arima.sim() simuliert werden.

Aufgabe 43 (Spektraldichte eines MA(1)-Prozesses)

Zeigen Sie, dass die Spektraldichte eines MA(1)-Prozesses $X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t+1}$ monoton fallend für $\theta > 0$ monoton steigend für $\theta < 0$ ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

bitte wenden

Aufgabe 44 (Optimale lineare Prognose I)

Sei

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

ein stationärer AR(2)-Prozess mit $\{\epsilon_t\}$ weißem Rauschen. Bestimmen Sie die optimale lineare Prognose für Y_t, gegeben nur Y_{t-1}.

Aufgabe 45 (Optimale lineare Prognose II)

Betrachten Sie den stationären MA(4)-Prozess

$$Y_t = \frac{1}{4}(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-4}),$$

wobei $\{\varepsilon_t\}$ ein weißes Rauschen mit $\mathsf{E}(\varepsilon_t) = 0$ und $\mathsf{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$. Bestimmen Sie die optimale lineare Prognose für Y_{t+1}, gegeben Y_t und Y_{t-1}, und berechnen Sie die Varianz des Prognosefehlers.

Abgabe: Mittwoch, 26.01.2011, in der Vorlesung. Bitte vermerken Sie auf der Abgabe, welche Übung Sie besuchen. Die Aufgaben werden in den Übungen am 28.01.2011 besprochen.

Homepage zur Vorlesung: `https://www.statistik.tu-dortmund.de/iwus-lehre-201011.html`