

Teil 1 – Beschreibende Statistik

Aufgabe 1:

Die folgende Tabelle zeigt die Einnahmen der öffentlichen Haushalte aus der Mineralölsteuer von 1995 bis 2005 (Angaben in Milliarden Euro):

Jahr	95	96	97	98	99	00	01	02	03	04	05
Einnahmen	33,2	34,9	33,7	34,1	36,4	37,8	40,7	42,2	43,2	41,8	40,1

Übertragen Sie diese Einnahmen in ein Histogramm mit den Klassen $[30, 34)$, $[34, 37)$, $[37, 41)$ und $[41, 44]$.

Aufgabe 2:

Jemand interessiert sich für einen neuen Fernseher. Im Internet findet er folgende Angebote für ein spezielles Modell:

Preis (in Euro)	450	500	525	550
Anzahl der Angebote	3	4	2	1

- Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion der Preise.
- Welchen Preis muss ein elfter Anbieter wählen, damit das arithmetische Mittel der Preise unverändert bleibt?

Aufgabe 3:

Angenommen, eine Umfrage unter n Studierenden ergibt folgende empirische Verteilungsfunktion für das Merkmal $X =$ „Anzahl der Versuche bis zum Bestehen der Statistik-Klausur“:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/2, & 1 \leq x < 2 \\ 3/4, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Anzahlen der Versuche bis zum Bestehen der Statistik-Klausur.

Aufgabe 4:

Angenommen, im Rahmen einer Untersuchung über das monatliche Einkommen von 50 Personen ergibt sich für die 20 Männer ein Durchschnittseinkommen von 5000 Euro und für die 30 Frauen ein Durchschnittseinkommen von 4500 Euro. Weiter beträgt die Standardabweichung der Einkommen innerhalb beider Gruppen 0 Euro. Wie groß ist dann die Standardabweichung der 50 Einkommen, wenn diese nicht mehr nach Geschlecht getrennt betrachtet werden?

Aufgabe 5:

Ein Anleger hat sechs Wertpapiere in seinem Depot, wobei er von jedem Wertpapier genau ein Stück besitzt. Angenommen, die Kurse entwickeln sich innerhalb eines Jahres wie folgt:

Wertpapier Nr.	1	2	3	4	5	6
Kurs am Jahresanfang	60	90	100	20	80	50
Kurs am Jahresende	80	60	80	50	100	50

Berechnen Sie einen geeigneten Durchschnitt der individuellen Wachstumsraten.

Aufgabe 6:

Um den linearen Zusammenhang zwischen der gefahrenen Geschwindigkeit X und dem Benzinverbrauch Y bei einem bestimmten Fahrzeugtyp zu untersuchen, wurde der Verbrauch (in Liter pro 100 km) bei $n = 11$ Geschwindigkeiten zwischen 50 und 130 km/h in gleichmäßigen Abständen gemessen. Dabei ergab sich ein Durchschnittsverbrauch von 8,5 Litern mit einer Standardabweichung von 1,2 Litern. Weiter wurde zwischen der Geschwindigkeit und dem Verbrauch eine empirische Kovarianz von 27 berechnet. Wie groß ist dann der Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient zwischen diesen beiden Merkmalen?

Aufgabe 7:

Ein Immobilien-Makler teilt seine Hausangebote in fünf Kategorien ein, wobei die Kategorie eines Hauses umso höher ist, je besser dessen Ausstattung ist (1 = einfache Ausstattung, ..., 5 = luxuriöse Ausstattung). Die folgende Tabelle enthält für 10 Häuser neben der Kategorie auch den Preis des Hauses (in 1000 Euro):

Haus	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
Preis	250	100	700	270	310	450	240	260	320	300
Kategorie	3	1	5	2	4	5	3	2	4	2

Berechnen Sie ein geeignetes Maß für den Zusammenhang zwischen Kategorie und Preis der Häuser.

Aufgabe 8:

Eine Firma interessiert sich für den Zusammenhang zwischen den Produktionskosten und der produzierten Menge. Die folgende Tabelle zeigt für fünf Produktionsgänge jeweils die produzierte Stückzahl sowie die Stückkosten:

Stückzahl x_i	10	15	15	20	25
Stückkosten y_i (in Euro/Stück)	50	40	45	40	30

- a) Bestimmen Sie die KQ-Gerade für die Stückkosten in Abhängigkeit von der Stückzahl.
- b) Ab welcher Stückzahl sind Kosten von weniger als 25 Euro/Stück zu erwarten?

Aufgabe 9:

Ein Personalchef vermutet einen Zusammenhang zwischen der Arbeitslosigkeit in der Region und dem Krankenstand in seinem Unternehmen. Die folgende Tabelle enthält für die vergangenen 12 Jahre Angaben über die durchschnittlichen Arbeitslosenzahlen im entsprechenden Arbeitsamtsbezirk und die Anzahlen der Krankmeldungen in seinem Betrieb:

Jahr	97	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07	08
Arbeitslose (in 1000)	5	6	6	7	17	15	15	13	12	9	8	7
Krankmeldungen	18	16	14	13	2	3	4	6	7	10	7	8

- a) Bestimmen und zeichnen Sie die KQ-Gerade für die Krankmeldungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Arbeitslosen in der Region.
- b) Geben Sie ein geeignetes Maß für die Anpassungsgüte der KQ-Geraden an.
- c) Angenommen, im Jahr 2009 gibt es in der Region 10.000 Arbeitslose. Welche Anzahl an Krankmeldungen ist dann in diesem Unternehmen zu erwarten?

Aufgabe 10:

Ein Warenkorb enthält die Güter Kaffee, Kakao, Milch und Tee. Angenommen, in der Basisperiode verteilen sich die Gesamtausgaben gleichmäßig auf diese vier Güter. Weiter angenommen, zur Berichtsperiode steigen die Preise von Kaffee, Kakao und Tee um jeweils 10%, während der Milchpreis gleich bleibt.

- a) Welcher Index-Typ eignet sich in dieser Situation zur Beschreibung der durchschnittlichen Preisänderung?
- b) Berechnen Sie die durchschnittliche Preisänderung gemäß des in a) vorgeschlagenen Indexes.
- c) Um wieviel Prozent müsste der Milchpreis zur Berichtsperiode fallen, damit der in a) vorgeschlagene Index ein konstantes Preisniveau anzeigt?

Aufgabe 11:

Ein Haushalt erhält von den Stadtwerken folgende Abrechnung:

	Strom		Gas		Rechnungs- betrag
	Menge [KWh]	Preis [Euro/KWh]	Menge [m ³]	Preis [Euro/m ³]	
2007	1350	0,17	70	3,40	467,50
2008	1400	0,19	60	3,60	482,00

Wie hoch ist die mittlere Preissteigerung nach Paasche?

Aufgabe 12:

Angenommen, die Preise aller Güter eines Warenkorbs steigen zwischen Basis- und Berichtsperiode um 20%. Wie groß ist dann der Preisindex nach Laspeyres?

Teil 2 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 13:

Ein Absolvent hat sich auf drei Stellenanzeigen beworben. Nach Abschluss der Vorstellungsgespräche rechnet er unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mit einer Zusage der ersten Firma, mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% mit einer Zusage der zweiten Firma und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% mit einer Zusage der dritten Firma. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihm nur eine einzige Firma ein Angebot unterbreitet?

Aufgabe 14:

Eine Firma produziert Schuhe. Dabei werden zuerst Oberteile, Sohlen und Absätze getrennt voneinander hergestellt und dann zufällig zu einzelnen Schuhen zusammengesetzt. Nehmen Sie an, dass 5% der Oberteile, 10% der Sohlen und 2% der Absätze Fehler aufweisen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein einwandfreier Schuh hergestellt?
- Ein Schuh wird aussortiert, wenn er mehr als einen Fehler aufweist. Wie groß ist dafür die Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 15:

Ein Student muss an einem Tag zwei Klausuren schreiben. Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, dass er beide Klausuren besteht, beträgt 45%. Nehmen Sie weiter an, dass der Student die zweite Klausur mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% besteht, wenn bekannt ist, dass er die erste Klausur bereits bestanden hat. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Student die erste Klausur besteht?

Aufgabe 16:

Eine Studentin arbeitet neben ihrem Studium aushilfsweise als Kellnerin in einem Restaurant. Die Anzahl der Tage, die sie in einer Woche arbeiten muss, sei eine diskrete Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,2	0,25	0,15	0,1	0,1	0,05

- Wieviele Tage arbeitet die Studentin erwartungsgemäß in einer Woche?
- Gehen Sie davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X während eines

Jahres nicht ändert. Wieviele Tage arbeitet die Studentin dann erwartungsgemäß in einem Jahr?

Aufgabe 17:

Angenommen, die Lebensdauer (in Jahren) eines Akkus ist eine stetige Zufallsvariable X mit der folgenden Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wie groß ist dann die Standardabweichung der Lebensdauer dieses Akkus?

Aufgabe 18:

In einem Betrieb treten an einer Produktionsanlage pro Tag höchstens drei Störfälle auf. Die Anzahl dieser Störfälle kann durch eine diskrete Zufallsvariable X mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion beschrieben werden:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,15	0,1

Gehen Sie weiter davon aus, dass sich die mit der Behebung der Störfälle verbundenen Kosten durch die Funktion

$$K(x) = 1000 \left(5 - \frac{4}{x+1} \right)$$

kalkulieren lassen. Wie hoch ist dann die Korrelation zwischen der Anzahl der Störfälle pro Tag und den durch sie verursachten Kosten?

Aufgabe 19:

Angenommen, ein 50-jähriger Mann zahlt für seine Risiko-Lebensversicherung am Jahresanfang einen Beitrag von 200 Euro. Verstirbt er während des folgenden Jahres, so zahlt der Versicherer 20.000 Euro an seine Hinterbliebenen aus. Weiter angenommen, für einen 50-jährigen Mann beträgt die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres zu sterben, 0,5%. Wie hoch ist dann der erwartete Gewinn des Versicherers in diesem Jahr?

Aufgabe 20:

Angenommen, einer von zehn Anrufen bei einer Feuerwehr ist ein „blinder Alarm“. Gehen Sie weiter davon aus, dass die einzelnen Anrufe voneinander unabhängig erfolgen.

- a) Wie viele Fehllarme sind dann in einem Monat mit 20 Anrufen zu erwarten?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit rückt die Feuerwehr bei 20 Anrufen in einem Monat mindestens 18 Mal aufgrund eines „echten“ Alarms aus?

Aufgabe 21:

Nehmen Sie an, dass die monatlichen Renditen der Deutschen Bank und des deutschen Aktienindex DAX normalverteilte Zufallsvariablen X und Y sind mit

$$E(X) = E(Y) = 0,5; \quad \text{Var}(X) = 13; \quad \text{Var}(Y) = 6; \quad \text{Cov}(X, Y) = 3.$$

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die monatliche Rendite der Deutschen Bank die monatliche Rendite des DAX um mehr als das Doppelte übersteigt?

Aufgabe 22:

Angenommen, jemand fährt jeden Tag mit dem Zug zur Arbeit. Dabei betrage die Wahrscheinlichkeit, an einem beliebigen Tag in eine Fahrkartenkontrolle zu geraten, 6%. Gehen Sie weiter davon aus, dass die Kontrollen an den einzelnen Tagen voneinander unabhängig erfolgen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem Jahr mindestens 20 Mal kontrolliert zu werden? Nehmen Sie dazu der Einfachheit halber an, dass ein Jahr 250 Arbeitstage hat.

Teil 3 – Schließende Statistik

Aufgabe 23:

In einem Betrieb verdienen vier Arbeiter 13 Euro pro Stunde, sechs Arbeiter 18 Euro pro Stunde und fünf Arbeiter 25 Euro pro Stunde. Schätzen Sie den durchschnittlichen Stundenlohn und die Varianz der Stundenlöhne erwartungstreu.

Aufgabe 24:

Im Rahmen einer Umfrage zum Thema „Freizeitgestaltung“ geben 20 zufällig ausgewählte Personen folgende Zeiten an, die sie täglich vor dem Fernseher verbringen (Angaben in Stunden):

2; 1,5; 3; 2; 2,5; 0,5; 1; 1,5; 1; 2,5;
3; 1; 1,5; 3; 2; 2,5; 4; 0,5; 3,5; 1.

Schätzen Sie den Anteil der Personen erwartungstreu, die täglich mindestens zwei Stunden fernsehen.

Aufgabe 25:

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n (n gerade) seien unabhängig und identisch verteilt mit unbekanntem Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X_i)$ und bekannter Varianz $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_i)$. Als Schätzer für μ stehen Ihnen folgende zwei Funktionen zur Auswahl:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n) \quad \text{und} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_{\frac{n}{2}} + \frac{3}{8}X_{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{8}X_n.$$

Welcher dieser beiden Schätzer ist effizienter zur Schätzung von μ ?

Aufgabe 26:

Ein Hersteller von Waschmaschinen möchte Aufschluss über den Wasserverbrauch eines neu entwickelten Modells gewinnen. Bei neun voneinander unabhängigen Probeläufen ermittelt er folgende verbrauchte Wassermengen (in Litern):

49, 44, 52, 53, 50, 54, 45, 48, 46.

Nehmen Sie an, dass diese Angaben Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen sind.

- Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Wasserverbrauch des neu entwickelten Modells.
- Wie ändert sich das in a) berechnete Konfidenzintervall, wenn zusätzlich bekannt ist,

dass das neu entwickelte Modell hinsichtlich seines Wasserverbrauchs mit der Standardabweichung von drei Litern arbeitet?

- c) Wieviele Probeläufe müsste der Hersteller durchführen, damit das in b) ermittelte Konfidenzintervall nicht breiter als zwei Liter ist?

Aufgabe 27:

Für die Durchführung eines Hilfeprojekts ist für ein Entwicklungsland zunächst der Anteil der Personen zu schätzen, die arm sind, d. h. die unter dem Existenzminimum leben. Im Rahmen einer Pilotstudie vom Umfang $n = 50$ Personen wurden 30 Personen als arm eingestuft.

- a) Schätzen Sie den Anteil der armen Personen in diesem Entwicklungsland erwartungstreu und geben Sie auch ein (approximatives) 90%-Konfidenzintervall für diesen Anteil an.
- b) Ist das (approximative) 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der armen Personen breiter oder schmaler als das in a) bestimmte Konfidenzintervall? Begründen Sie Ihre Entscheidung, ohne dabei das Konfidenzintervall auszurechnen.
- c) Wieviele Personen müssten befragt werden, damit das (approximative) 90%-Konfidenzintervall aus a) nicht breiter als fünf Prozentpunkte ist?

Aufgabe 28:

Ein Forscher möchte untersuchen, ob sich die Einkommen von Männern und Frauen in der letzten Zeit angeglichen haben. Dazu verwirft er die Nullhypothese „Das Einkommen von Männern und Frauen ist gleich“, wenn unter zehn zufällig und voneinander unabhängig ausgewählten Ehepaaren immer die Männer mehr verdienen als ihre Frauen.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit begeht der Forscher einen Fehler 1. Art?
- b) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mann mehr verdient als seine Frau, beträgt $2/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit begeht der Forscher dann einen Fehler 2. Art?
- c) Was ist prinzipiell an der Vorgehensweise des Forschers zu bemängeln?

Aufgabe 29:

Ein Angestellter in einem Elektrofachhandel verspricht, dass die von ihm verkauften Glühbirnen im Durchschnitt mindestens ein Jahr funktionieren. Ein kritischer Kunde hat vor zwei Jahren 20 Glühbirnen gekauft und für sie eine durchschnittliche Funktionsdauer von 11,4 Monaten ermittelt.

- a) Kann der Kunde die Nullhypothese „Die Funktionsdauer der Glühbirnen beträgt durchschnittlich mindestens ein Jahr.“ zum 5%-Niveau ablehnen? Nehmen Sie dazu an, dass die Funktionsdauer der Glühbirnen eine normalverteilte Zufallsvariable ist, die eine Standardabweichung von drei Monaten besitzt.
- b) Berechnen Sie die Gütefunktion des in a) verwendeten Tests für das zu Grunde liegende Testproblem.
- c) Wie groß ist für den Kunden die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, wenn die durchschnittliche Funktionsdauer der Glühbirnen in Wirklichkeit elf Monate beträgt?

Aufgabe 30:

Ein Produzent behauptet über das von ihm hergestellte Mineralwasser, dass dieses einen mittleren Calciumgehalt von 1000 mg/l hat. Eine im Rahmen einer Qualitätskontrolle durchgeführte Untersuchung ergab für zehn zufällig ausgewählte Wasserflaschen folgende Calciumgehalte (in mg/l):

950, 940, 1025, 800, 975, 1000, 875, 990, 915, 1030.

Gehen Sie davon aus, dass diese Messwerte Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz von 2500 (mg/l)^2 sind. Testen Sie zum 1%-Niveau, ob der mittlere Calciumgehalt des Mineralwassers signifikant von 1000 mg/l verschieden ist.

Aufgabe 31:

Die Anwohner einer Tempo-30-Zone beschwerten sich bei der Polizei immer wieder darüber, dass der Durchgangsverkehr durchschnittlich mindestens 10 km/h zu schnell unterwegs ist. Mittels einer Radarkontrolle, in die 26 Fahrzeuge geraten, ermittelt die Polizei daraufhin eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 42 km/h bei einer geschätzten Standardabweichung von 5 km/h. Überprüfen Sie anhand dieser Werte die Behauptung der Anwohner zum 10%-Niveau. Gehen Sie dabei davon aus, dass die gemessenen Geschwindigkeiten Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 32:

Angenommen, in einer Umfrage unter 500 voneinander unabhängig befragten Personen geben 230 Befragte an, bei der letzten Wahl für die Regierungspartei gestimmt zu haben. Überprüfen Sie zum 1%-Niveau, ob dies gegen die Behauptung des Regierungschefs

„Unser Wähleranteil beträgt mindestens 50 Prozent.“

spricht.

Aufgabe 33:

Um zu untersuchen, ob Männer ein stärkeres Interesse an einer akademischen Karriere haben als Frauen, werden 1000 zufällig ausgewählte Studierende nach ihren beruflichen Plänen befragt. Von den 650 befragten Männern geben 160 an, nach Abschluss ihres Studiums an der Universität bleiben zu wollen. Insgesamt sind 220 Studierende an einer akademischen Karriere interessiert. Überprüfen Sie zum 1%-Niveau, ob die Merkmale „Geschlecht“ und „Interesse an einer akademischen Karriere“ voneinander unabhängig sind.

Aufgabe 34:

Angenommen, in einem Krankenhaus wurden in einem Jahr 840 Kinder geboren. Die folgende Tabelle zeigt, wie sich die Geburten auf die einzelnen Wochentage verteilen:

Wochentag	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Anzahl Geburten	123	121	128	142	118	110	98

Testen Sie zum 10%-Niveau die Behauptung, dass die Geburten über die Woche gleichverteilt sind.