Bemerkung

a) Wiederhole Zufallsexperiment mit K Elementarereignissen n-mal $\rightarrow$ das zusammengesetzte Zufallsexperiment besitzt K^n Elementarereignisse

- Betrachte etwa Beispiel 8.2 b), $n = 2$maliges Würfeln $(K = 6)$
  $\rightarrow$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \otimes \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Elementarereignisse:

$$\underbrace{\underbrace{(1,1),\ldots,(1,6)}_{\text{6 Ereignisse}},\ \underbrace{(2,1),\ldots,(2,6)}_{\text{6 Ereignisse}},\ldots,\underbrace{(6,1),\ldots,(6,6)}_{\text{6 Ereignisse}}}_{=6\times 6=6^2=K^n \text{ Elementarereignisse}}$$

$\rightarrow$ Ω enthält 36 Elementarereignisse (Bezeichnung: $|\,\Omega\,| = 36$)

Bemerkung (Fortsetzung)

b) Bisher: Definition von Ereignissen, Mengen, Vereinigungen, Schnitten,...
$\longrightarrow$ Jetzt von Interesse: Wie wahrscheinlich ist Eintritt eines bestimmten Ereignisses?

- Beispiel 8.2 b), zweimaliges Würfeln: Wahrscheinlichkeit des Eintritts von Ereignis A (Augensumme 10), B (nur ungerade Zahlen), $A \cup B$,...?

Definition 8.3

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten, heißt Laplace-Experiment. In einem solchen Experiment ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\text{Anzahl der in } A \text{ enthaltenen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}} \end{aligned}$$

Beispiel 8.4

Zweimaliges Würfeln wie in Beispiel 8.2 b) entspricht einem Laplace-Experiment, da jedes Elementarereignis mit Wahrscheinlichkeit $(1/36) \times 100$ Prozent eintritt $\rightarrow$

Ereignis			
verbal	mengentheoretisch	$\| \cdot \|$	P $(\cdot)$
A : „Augensumme$=$10 “	$\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$	3	3/36
B : „nur ungerade Zahlen “	$\{(1,1),...,(5,5)\}$	9	9/36
C : „gerade Zahl in Wurf 1 “	$\{(2,1),...,(6,6)\}$	18	18/36

Einmaliges Würfeln, vgl. Beispiel 8.2 a): Analog

Bemerkung

Problem: Nicht immer liegt Laplace-Experiment vor

- Beispiel: Gezinkter Würfel mit

$$\begin{aligned} \text{P(Augenzahl}=6) &= 1/3 \text{ und} \\ \text{P(Augenzahl}=i) &= \frac{2/3}{5} = 2/15,\ i = 1, ..., 5 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ allgemeinerer Wahrscheinlichkeitsbegriff notwendig

Definition 8.4

Eine Abbildung P, die allen Ereignissen $A \subseteq \Omega$ eines Zufallsexperiments eine Zahl $\mathsf{P}(A)$ zuordnet und die Kolmogoroff'schen Axiome

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$
- $\mathsf{P}(\Omega) = 1$
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ für alle $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$

erfüllt, heißt <u>Wahrscheinlichkeitsmaß</u>

Bemerkung

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten (ergeben sich aus Kolmogoroff'schen Axiomen)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\emptyset) &= 0 \\
\mathsf{P}(\bar{A}) &= 1 - \mathsf{P}(A) \\
\mathsf{P}(A \cup B) &= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) \\
\mathsf{P}(A) &= \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}(\{\omega_i\})
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.5

Landtag NRW (Zusammensetzung nach Partei und Geschlecht)

	CDU	SPD	Grüne	FDP	Linke	$\sum$
männlich	57	48	11	11	5	132
weiblich	10	19	12	2	6	49
$\sum$	67	67	23	13	11	181

- zufällige Auswahl eines Landtagsmitglieds $\to$ Laplace-Experiment, jedes Elementarereignis (=Landtagsmitglied) kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden
- $\Omega =$ „Alle Mitglieder des Landtags“ $\to$ $|\Omega| = 181$

Beispiel 8.5 (Fortsetzung)

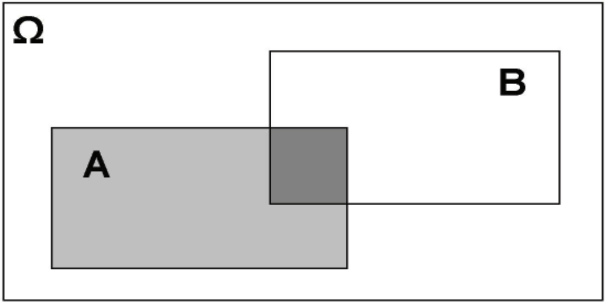
- Definiere nun Ereignisse
  - $A =$ „weibliche Person“
  - $B =$ „SPD-zugehörig“

$\rightarrow$ $\mathsf{P}(B) = 67/181 \approx 0,37$; $\mathsf{P}(A \cup B) = 97/181 \approx 0,54$; $\mathsf{P}(A \cap B) = 19/181 \approx 0,1; \ldots$

- Frage jedoch: Wie wahrscheinlich ist SPD-Zugehörigkeit bei weiblichen Landtagsmitgliedern
  - Formell: $\rightarrow$ $\mathsf{P}(B$ **gegeben** $A)$ bzw. $\mathsf{P}(B \mid A)$
  - So genannte bedingte Wahrscheinlichkeit: Beschränkung der möglichen Ereignisse auf eine Teilmenge von Ω (hier: A)

Beispiel 8.5 (Fortsetzung)

- Venn-Diagramm: Bedingte Wahrscheinlichkeit



- Hellgrau: Reduzierte Ergebnismenge (hier: weibliche Personen)
- Dunkelgrau: Teilmenge der reduzierten Ergebnismenge, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit gesucht wird (hier: SPD-Mitgl., w.)
- Rest (weißer Bereich): Uninteressant

Definition 8.5

Sei $\mathsf{P}(A) > 0$. Dann heißt

$$\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A.

Beispiel 8.6

(Landtag NRW, vgl. Beispiel 8.5)

$$\mathsf{P}(\text{SPD} \mid \text{weiblich}) = \mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{19/181}{49/181}$$
$$= \frac{19}{49} = 0,388$$

Beispiel 8.7

a) Dreimaliger Münzwurf

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(Z,Z,Z),(Z,Z,K),(Z,K,Z),(K,Z,Z),(K,K,K),\\ &\quad (K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K)\}\end{aligned}$$

- Ereignis A : Mindestens $1\times$ Zahl
- Ereignis B : Mindestens $2\times$ Kopf
- Gesucht: $\mathsf{P}\,(B\,|\,A)$ $\rightarrow$ reduzierte Ergebnismenge A

$$\begin{aligned}A &= \{(Z,Z,Z),(Z,Z,K),(Z,K,Z),(K,Z,Z),\\ &\quad \underbrace{(K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K)}_{\text{Ereignisse mit } 2\times \text{ Kopf}}\}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\mathsf{P}\,(B\,|\,A) = 3/7$ (da $|A| = 7$)

Beispiel 8.7 (Fortsetzung)

a) Dreimaliger Münzwurf (Fortsetzung)

Alternative Berechnung von $\mathsf{P}(B \mid A)$ mit Def. 8.5

- $|\Omega| = 8$
- $\mathsf{P}(A) = 7/8$
- $A \cap B = \{(K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K)\}$
  $\rightarrow \; \mathsf{P}(A \cap B) = 3/8$

$$\rightarrow \; \mathsf{P}(B \mid A) = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$$

Beispiel 8.7 (Fortsetzung)

b) Zweimaliges Würfeln, vergleiche Beispiel 8.2 b)

- Neben Ereignissen $A - C$ definiere $D =$„ungerade Zahl in Wurf 2“
- Zur Erinnerung: $C =$„gerade Zahl in Wurf 1“

$$\begin{aligned}
C &= \{(2,1), ..., (2,6), (4,1), ..., (6,6)\} \\
&\rightarrow |C| = 18 \rightarrow \mathsf{P}(C) = 1/2 \ (|\Omega| = 36) \\[1em]
D &= \{(1,1), ..., (1,5), (2,1), ..., (6,5)\} \\
&\rightarrow |D| = 18 \rightarrow \mathsf{P}(D) = 1/2 \\[1em]
C \cap D &= \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), ..., (6,5)\} \\
&\rightarrow |C \cap D| = 9 \rightarrow \mathsf{P}(C \cap D) = 1/4
\end{aligned}$$

Beispiel 8.7 (Fortsetzung)

b) Zweimaliges Würfeln (Fortsetzung)

- Gesucht: P(„Wurf 2 ungerade“ | „Wurf 1 gerade“) :

$$\mathsf{P}\left(D \mid C\right) = \frac{\mathsf{P}\left(D \cap C\right)}{\mathsf{P}\left(C\right)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = \mathsf{P}\left(D\right)$$

$\rightarrow$ Ereignis C hat keinen Einfluß auf Ereignis D, beide Ereignisse hängen nicht voneinander ab

Definition 8.6

Gilt für zwei Ereignisse A und B mit $\mathsf{P}(A) > 0$ und $\mathsf{P}(B) > 0$

$$\mathsf{P}(A \,|\, B) = \mathsf{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathsf{P}(B \,|\, A) = \mathsf{P}(B),$$

so heißen diese stochastisch unabhängig.

Bemerkung

Die Aussage „A und B stochastisch unabhängig“ ist äquivalent zu

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

Beispiel 8.8

(Investitionsprojekt, vergleiche Beispiel 8.1)

- A = „zuviel Regen“ mit $\mathsf{P}(A) = 0,1$; B = „Dollarkurs steigt“ mit $\mathsf{P}(B) = 0,4$
  $\rightarrow$ P (Investitionsprojekt in Gefahr) $= \mathsf{P}(A \cup B)$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \cup B) &\overset{\star}{=} \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) \\
&\overset{\star\star}{=} \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \\
&= 0,1 + 0,4 - 0,1 \cdot 0,4 \\
&= 0,46
\end{aligned}$$

- Zu $\star$: Siehe Bemerkung nach Definition 8.4

  Zu $\star\star$: A und B stochastisch unabhängig (klar) $\rightarrow$ wende Bemerkung nach Definition 8.6 an

Beispiel 8.9

a) Stochastische Unabhängigkeit in der Öffentlichkeit: **Mann für Millionen** (Westdeutsche Allgemeine Zeitung, 30.09.2010)

„Bereits zum zweiten Mal in diesem Jahr hat ein Mann aus dem US-Staat Missouri einen Millionengewinn mit Rubbellosen einkassiert. Im Juni hatte der 57-Jährige beim '100 Million Dollar Blockbuster' eine Million gewonnen. Nun gelang ihm die Sensation erneut, diesmal waren es gleich zwei Millionen, die er beim 'Mega Monopoly' gewann. Die Chancen, bei einem der beiden Spiele den Höchstbetrag zu gewinnen, lägen bei 1:2,28 Millionen, heißt es. Die Chancen, gleich bei beiden Spielen abzusahnen, seien kaum zu berechnen, da sie unabhängig voneinander seien.“

Beispiel 8.9 (Fortsetzung)

a) **Mann für Millionen** (Fortsetzung)

Definiere

$A =$ „Gewinn beim 100 Million Dollar Blockbuster“

$B =$ „Gewinn beim Mega Monopoly“

Bekannt: $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = 1 : 2,28$ Mio. und A und B unabhängig

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \mathsf{P}(\text{Gewinn bei beiden Spielen}) &= \mathsf{P}(A \cap B) \\ &= \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \\ &\sim 1 : 5,2 \text{ Billionen} \end{aligned}$$

Beispiel 8.9 (Fortsetzung)

b) **Prozess gegen O. J. Simpson** (1995)

- M. Dershowitz (Strafverteidiger): „...an infinitesimal percentage - certainly fewer than 1 out of 2.500 - of men who slap or beat their domestic partners go on to murder them“:
  $\rightarrow$ $\mathsf{P}(M|S) < 1/2.500$
  (M=„Mann ermordet Ehefrau“, S=„Mann schlägt Ehefrau“)

- Definiere zusätzlich m=„Ehefrau wird ermordet“
  $\rightarrow$ $\mathsf{P}(M|\{S \cap m\}) \approx 0,9$ (vgl. Good, 1996)

- Details:
  Dershowitz (1996), *Reasonable Doubts: The O.J. Simpson Case and the Criminal Justice System*, New York, 1996;
  Good (1996), *When batterer becomes murderer*, Nature 381

- Prozessurteil: Freispruch

Bemerkung

Fazit/Zusammenfassung Kapitel 8

- Zufallsexperiment, Ergebnismenge, Ereignisse
- klassischer (Laplace) und axiomatischer (Kolmogoroff) Wahrscheinlichkeitsbegriff
- bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
- Vorsicht bei der Interpretation bedingter Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 9: Zufallsvariablen

Kapitel 8: Betrachtung von Ereignissen $\omega_i, \omega_j, A, B, ... \subset \Omega$

Jetzt: Ordne Ereignissen Zahlen zu

Definition 9.1

Eine Abbildung X, deren mögliche Werte vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängen, heißt Zufallsvariable. Formell

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

X ordnet somit jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zu. Die möglichen Werte $\omega \to X(\omega)$ einer Zufallsvariablen nennt man Realisationen. Weiterhin heißt X

- diskrete Zufallsvariable, falls sie nur endlich viele oder abzählbar viele Werte annehmen kann
- stetige Zufallsvariable, wenn sie - eventuell innerhalb gewisser Grenzen - alle möglichen reellen Zahlen als Werte annehmen kann

Beispiel 9.1

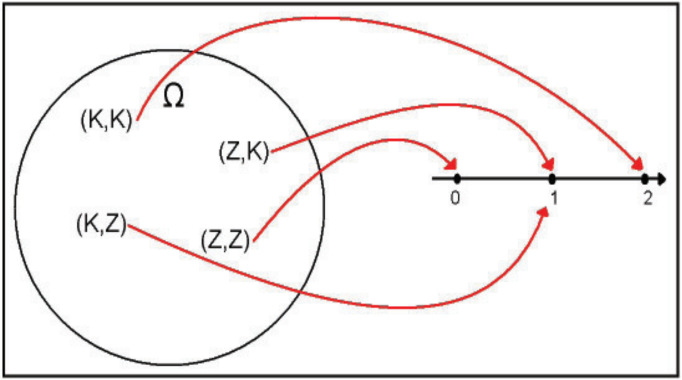
a) Zweimaliger Münzwurf

$\rightarrow \; \Omega = \{(Z,K),(K,Z),(K,K),(Z,Z)\}$

- Definiere Zufallsvariable X =„Anzahl Würfe mit Kopf“

  $\rightarrow \; X(Z,K) = X(K,Z) = 1, \; X(K,K) = 2, \; X(Z,Z) = 0$

  $\rightarrow \; X \in \{0,1,2\}$ diskrete Zufallsvariable



Beispiel 9.1 (Fortsetzung)

b) Verschiedene Zufallsvariablen+Typ (stetig/diskret)

Zufallsvariable	Wertebereich	Typ
Augensumme zweimaliges Würfeln	$\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$	diskret
Lebensdauer eines Prozessors	$[0, \infty)$	stetig
Anzahl erfolgloser Lottotipps bis zum ersten Hauptgewinn	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	diskret
Logarithmierte Aktienrendite an zufälligem Börsentag	$(-\infty, \infty)$	stetig