Beispiel 7.2

(Ausgaben für Freizeitgestaltung, vgl. Beispiel 7.1)

Alternative Berechnung von P_{0t}^L, vgl. Bem. c) nach Def. 6.1

$$g_0(1) = \frac{14}{29,5}, \quad g_0(2) = \frac{12}{29,5} \quad \text{und} \quad g_0(3) = \frac{3,5}{29,5},$$

also:

$$\begin{aligned} P_{09,10}^L &= \frac{14}{29,5} \cdot \frac{1,35}{1,40} + \frac{12}{29,5} \cdot \frac{7,00}{6,00} + \frac{3,5}{29,5} \cdot \frac{5,00}{3,50} \\ &= 1,1017. \end{aligned}$$

Definition 7.2

Notationen wie in Definition 7.2, außerdem bezeichne $q_t(i)$ die konsumierte Menge von Gut Nr. i in Periode t. Dann heißt

$$P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}$$

Preisindex nach Paasche für die Berichtsperiode t zur Basisperiode 0.

Bemerkung

Der Preisindex nach Paasche

- verwendet Mengen der Berichtsperiode und bestimmt durchschnittliche Preisänderung (Laspeyres-Index: Gleiches Vorgehen, verwendet allerdings Mengen der Basisperiode)
- vergleicht tatsächliche Gesamtausgaben in Berichtsperiode mit hypothetischen Gesamtausgaben in Basisperiode
- beantwortet Frage, wieviel Warenkorb aus Berichtsperiode in Basisperiode gekostet hätte

Beispiel 7.3

(Ausgaben für Freizeitgestaltung, vgl. Beispiel 7.1 & 7.2)

Für den Warenkorb „Freizeitgestaltung" ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P_{09,10}^{P} &= \frac{1,35 \cdot 12 + 7,00 \cdot 1 + 5,00 \cdot 1}{1,40 \cdot 12 + 6,00 \cdot 1 + 3,50 \cdot 1} = \frac{28,2}{26,3} \\
&= 1,072.
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Gemäß Paasche-Index beträgt mittlerer Preisanstieg 7,2 %

Bemerkung 1

- Häufig gilt $P_{0t}^{L} > P_{0t}^{P}$; Grund: Bei allgemeiner Preissteigerung werden verhältnismäßig günstige Güter stärker konsumiert als teure Artikel (Substitution teurer durch günstige Güter) $\rightarrow$ wird durch Laspeyres-Index nicht berücksichtigt

- Paasche-Index benötigt wesentlich mehr Informationen (Mengenangaben aus <u>allen</u> Berichtsperioden) als Laspeyres-Index (Mengenangaben aus Basisperiode)

- Laspeyres-Index in Praxis weiter verbreitet

Bemerkung 1 (Fortsetzung)

- Auch Paasche-Index als gewichtetes arithmetisches Mittel der individuellen Preisverhältnisse darstellbar:

$$P_{0t}^{P} = \sum_{i=1}^{n} g_t(i) \cdot \frac{p_t(i)}{p_0(i)}$$

mit

$$\begin{aligned} g_t(i) &= \frac{\text{hypothetische Ausgaben für Gut } i \text{ in Basisperiode}}{\text{hypothetische Gesamtausgaben in Basisperiode}} \\ &= \frac{p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{j=1}^{n} p_0(j) \cdot q_t(j)} \end{aligned}$$

Bemerkung 2 (Preisindex in der Praxis)

Der Verbraucherpreisindex (VPI) in Deutschland

- Monatlich vom Statistischen Bundesamt berechnet
- Aufgabe:
  - Beschreibung der Preisentwicklung aller Waren & Dienstleistungen, die von privaten Haushalten konsumiert werden
  - Orientierung (Inflation, Lohnverhandlungen,...)
- Datengrundlage:
  - Warenkorb enthält alle relevanten Güter und Dienstleistungen, Aktualisierung alle 5 Jahre $\rightarrow$ Laspeyres-Index
  - Preise der Güter im Warenkorb werden monatlich in denselben Geschäften (repräsentative Stichprobe) erhoben, außerdem zentrale Preiserfassung (Versandhäuser...)

Bemerkung 2 (Fortsetzung)

- Berechnung: Mehrfaches (gewichtetes) arithmetisches Mitteln
  - Elementarindex pro Gut/Dienstleistung und pro Bundesland (arithmetisches Mittel der Preisreihen)
  - Gesamtdeutscher Teilindex pro Gut/Dienstleistung (gewichtetes arithmetisches Mittel der Elementarindizes über die Bundesländer)

$\Rightarrow$ VPI: Gewichtetes arithmetisches Mittel der gesamtdeutschen Teilindizes

Bemerkung 2 (Fortsetzung)

- Gewichte der Bundesländer, Basisjahr 2000 (entspricht landesspezifischem Anteil an gesamtdeutschen privaten Konsumausgaben) $\longrightarrow$ gesamtdeutscher Teilindex pro Gut; Angaben in % (Quelle: Statistisches Bundesamt):

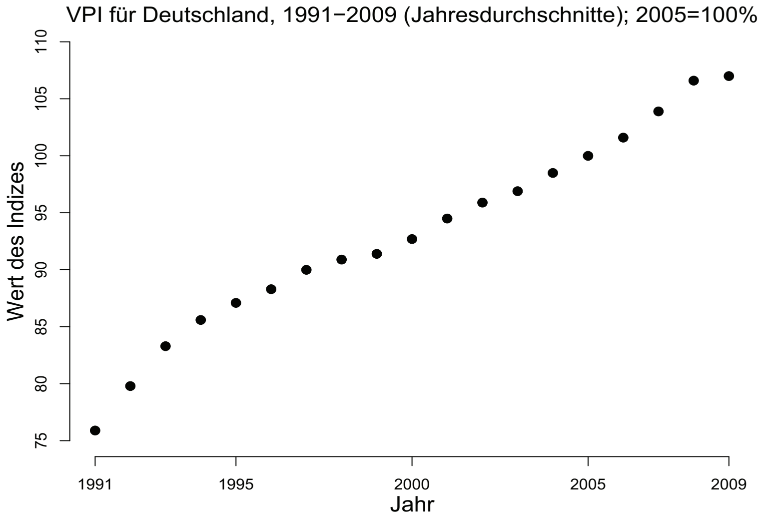
Nordrhein-Westfalen	23,5	Schleswig-Holstein	3,3
Bayern	15,4	Brandenburg	2,7
Baden-Württemberg	13,5	Sachsen-Anhalt	2,7
Niedersachsen	9,5	Thüringen	2,5
Hessen	7,3	Hamburg	2,3
Rheinland-Pfalz	4,8	Mecklenburg-Vorpommern	1,8
Sachsen	4,6	Saarland	1,3
Berlin	3,8	Bremen	1,0

Bemerkung 2 (Fortsetzung)

- Zusammensetzung VPI-Warenkorb, Basisjahr 2005 $\longrightarrow$ entspricht Gewichten bei Berechnung des VPIs aus Teilindizes; Angaben in % (Quelle: Statistisches Bundesamt):

Nahrungsmittel	10,4	Verkehr	13,2
Alkoholische Getränke & Tabakwaren	3,9	Nachrichtenübermittlung	3,1
Bekleidung & Schuhe	4,9	Freizeit, Unterhaltung & Kultur	11,6
Wohnung & Energie	30,8	Bildungswesen	0,7
Einrichtungsgegenstände	5,6	Beherbergung & Gaststätten	4,4
Gesundheitspflege	4,0	Sonstiges	7,4

Bemerkung 2 (Fortsetzung)



Bemerkung 2 (Fortsetzung)

- Praktische Probleme beim VPI
  - Wahl geeigneter Produkte aus Gütergruppe („Preisrepräsentanten“)
  - Umgang mit Produktvariationen zwischen zwei Umbasierungen des Warenkorbs (Produkte verschwinden & kommen hinzu; Qualitätsänderungen, z.B. Veränderung der Packungsgröße,...)
  - Wahl der Preise (Discount- , Aktionspreise, in- oder exklusive Steuern,...)
  - Beschaffung von Infos über Konsummuster (Bei Aufstellung des Warenkorbes)
  - ...

Teil B: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kapitel 8: Zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten

Motivation

Bisher:

- Beschreibung/Komprimierung/Vereinfachung von Datensätzen (beobachteten Merkmalsausprägungen) durch
  - Grafiken
  - Tabellen
  - Kennzahlen

Jetzt:

- Treffe auf Basis beobachteter Merkmalsausprägungen Aussagen über zukünftige, „unsichere“ Beobachtungen

„Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System,
das uns beim Raten hilft.“

R. Feynman, US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisträger
(1918 – 1988)

Beispiel 8.1

Ein Investitionsprojekt ist in Gefahr, wenn es während der Bauphase zu viel regnet oder der Dollarkurs steigt. Bekannt ist:

$$\begin{aligned} \text{Regenwahrscheinlichkeit} &= 10\% \\ \text{Wahrscheinlichkeit dass Dollar steigt} &= 40\% \end{aligned}$$

$\rightarrow$ wie wahrscheinlich ist Gefährdung des Investitionsprojekts?

Definition 8.1

Ein <u>Zufallsexperiment</u> ist ein Vorgang,

- der mehrere, sich gegenseitig ausschließende mögliche Ausgänge besitzt
- dessen Ausgang nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann
- der unter identischen Rahmenbedingungen beliebig oft wiederholbar ist;

Definition 8.1 (Fortsetzung)

- Die n möglichen Ausgänge $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eines Zufallsexperiments heißen Elementarereignisse
- Die Menge

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

  aller Elementarereignisse heißt Ergebnismenge
- Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ der Ergebnismenge heißen Ereignisse

Beispiel 8.2

a) Einmaliges Würfeln entspricht Zufallsexperiment mit Ausgängen 1,...,6

Ergebnismenge Ω	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Elementarereignisse	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
Ereignis A : „gerade Zahl“	$\{2, 4, 6\}$
Ereignis B : „ungerade Zahl“	$\{1, 3, 5\}$
Ereignis C : „Primzahl“	$\{2, 3, 5\}$
Ereignis D : „Zahl größer 3“	$\{4, 5, 6\}$

Beispiel 8.2 (Fortsetzung)

b) Zweimaliges Würfeln $\rightarrow$ Elementarereignisse jetzt Zahlenpaare, die sich aus $\{1, \ldots, 6\}$ zusammensetzen

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),\\ &\qquad (2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &\qquad (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),\\ &\qquad (5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\\ &= \{1,2,3,4,5,6\} \otimes \{1,2,3,4,5,6\}\end{aligned}$$

($\otimes$ =Kartesisches Produkt=Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A,\ b \in B$)

Beispiel 8.2 (Fortsetzung)

b) Zweimaliges Würfeln (Fortsetzung)

Ergebnismenge Ω	$\{(1,1),(1,2),...,(1,6),$ $(2,1),...,(6,5),(6,6)\}$
Elementarereignisse	$\{(1,1)\},...,\{(6,6)\}$
Ereignis A : „Augensumme=10“	$\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
B : „nur ungerade Zahlen“	$\{(1,1),(1,3),(1,5),$ $(3,1),...,(5,3),(5,5)\}$
C : „gerade Zahl in Wurf 1“	$\{(2,1),(2,2),...,(2,6),$ $(4,1),...,(6,5),(6,6)\}$

Definition 8.2

Betrachte Zufallsexperiment mit Ergebnismenge Ω und Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$. Die Menge der Elementarereignisse ω_i, die

a) sowohl in A als auch in B liegen, heißt Schnittmenge von A und B (kurz: $A \cap B$)

b) in A oder in B liegen, heißt Vereinigungsmenge von A und B (kurz: $A \cup B$)

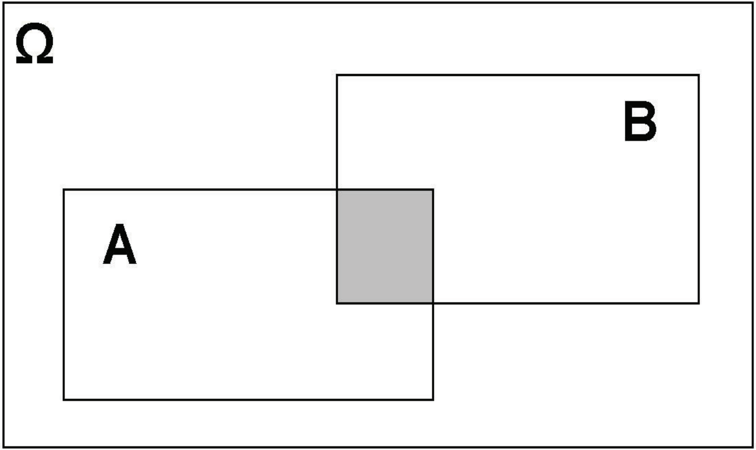
c) in A aber nicht in B liegen, heißt Differenzmenge von A und B (kurz: $A \setminus B$)

d) nicht in A liegen, heißt Komplementärereignis zu A (kurz: $\bar{A}$);

Weiterhin heißen A und B disjunkt, falls ihre Schnittmenge die leere Menge ist $(A \cap B = \emptyset)$

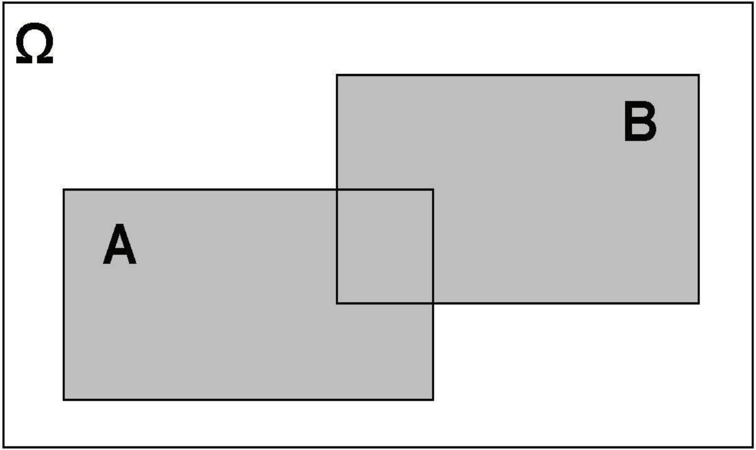
Bemerkung

a) Venn-Diagramm: $A \cap B$, vgl. Definition 8.2 a)



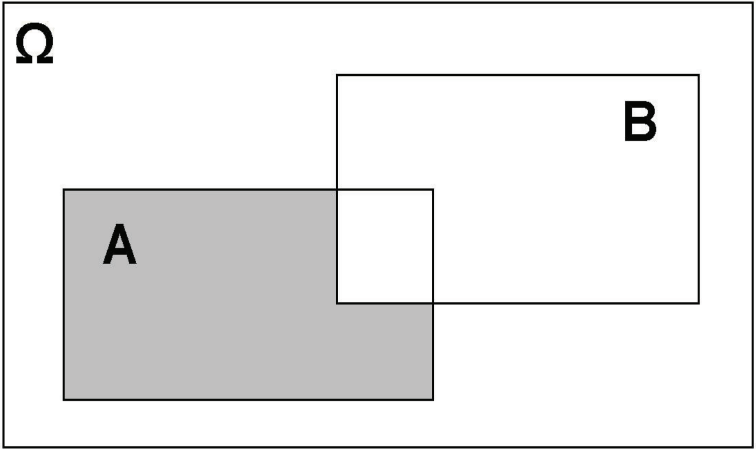
Bemerkung (Fortsetzung)

b) Venn-Diagramm: $A \cup B$, vgl. Definition 8.2 b)



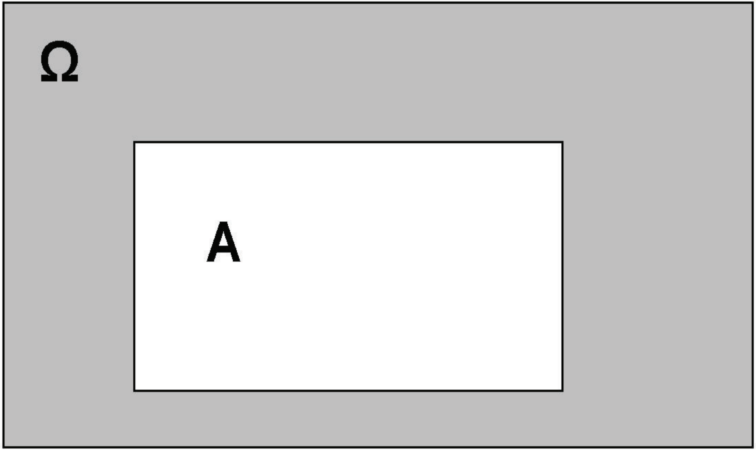
Bemerkung (Fortsetzung)

c) Venn-Diagramm: $A \setminus B$, vgl. Definition 8.2 c)



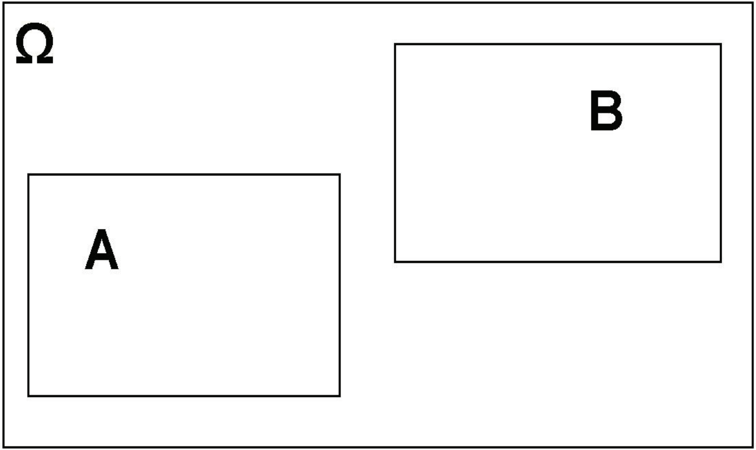
Bemerkung (Fortsetzung)

d) Venn-Diagramm: $\bar{A}$, vgl. Definition 8.2 d)



Bemerkung (Fortsetzung)

e) Venn-Diagramm: A und B disjunkt, vgl. Definition 8.2



Beispiel 8.3

a) Einmaliges Würfeln, vgl. Beispiel 8.2 a);

Für die betrachteten Ereignisse ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \text{gerade und ungerade Zahl} &&= \emptyset \\
A \cap C &= \text{gerade Zahl und Primahl} &&= \{2\} \\
B \cup D &= \text{ungerade Zahl oder Zahl größer als } 3 &&= \{1, 3, 4, 5, 6\} \\
C \setminus D &= \text{Primzahl, die nicht größer als } 3 \text{ ist} &&= \{2, 3\} \\
\bar{A} &= \text{ungerade Zahl} &&= B
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.3 (Fortsetzung)

b) Zweimaliges Würfeln, vgl. Beispiel 8.2 b);

Für die betrachteten Ereignisse ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \text{Augensumme=10} \\
&\quad \text{+nur ungerade Zahlen} &&= \{(5,5)\} \\
A \cap C &= \text{Augensumme=10} \\
&\quad \text{+gerade Zahl in Wurf 1} &&= \{(4,6),(6,4)\} \\
B \cap C &= \text{nur ungerade Zahlen} \\
&\quad \text{+gerade Zahl in Wurf 1} &&= \emptyset \\
A \cup C &= \text{Augensumme=10} \\
&\quad \text{oder gerade Zahl in Wurf 1} &&= \{C,(5,5)\} \\
A \setminus B &= \text{Augensumme=10} \\
&\quad \text{+mindestens eine gerade Zahl} &&= \{(4,6),(6,4)\}
\end{aligned}
$$