Bemerkung

- Frage: Wie lässt sich analoges Konfidenzintervall für mittlere Wartezeit finden, wenn Varianz σ^2 unbekannt?
- Idee: Ersetze in Bemerkung nach Beispiel 13.1 die unbekannte Varianz σ^2 durch erwartungstreuen Schätzer, z.B. $\tilde{S}_X^2$ (siehe Bem. d) nach Bsp. 12.4)
- Problem:

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X} \not\sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Aber:

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X}$$ besitzt andere, leicht handhabbare Verteilung

Definition 13.2

$X_1, ..., X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, dann heißt die Zufallsvariable

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden, kurz: $Y \sim \chi_n^2$.

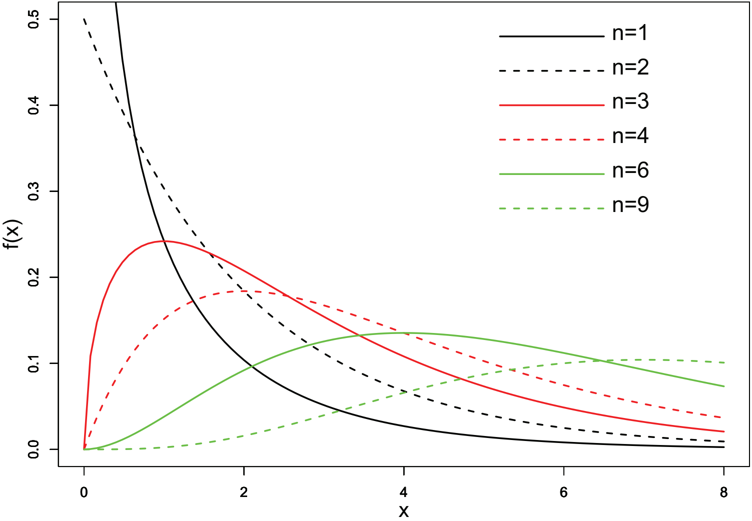
Weiter sei W ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt und Y wie oben definiert (also $Y \sim \chi_n^2$). Sind W und Y stochastisch unabhängig, so heißt die Zufallsvariable

$$Z = \frac{W}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}}$$

t-verteilt mit n Freiheitsgraden, kurz: $Z \sim t_n$.

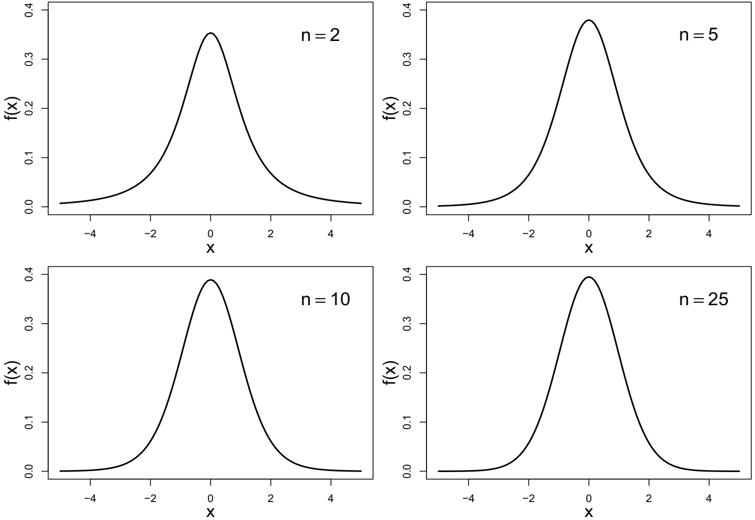
Bemerkung 1

a) Dichten ausgesuchter χ_n^2-Verteilungen



Bemerkung 1 (Fortsetzung)

b) Dichten ausgesuchter t_n−Verteilungen



Bemerkung 2

a) Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung, σ^2 unbekannt

Betrachte Problem aus Bem. nach Bsp. 13.2: $X_i \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit μ und σ^2 unbekannt; Gesucht: Konfidenzintervall für μ

Bekannt: $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1);$

außerdem leicht zu zeigen: $(n-1)\,\frac{\tilde{S}_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Weiter sind $\bar{X}$ und $\tilde{S}_X^2$ stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{n-1}{n-1}\,\frac{\tilde{S}_X^2}{\sigma^2}}} = \frac{\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}}{\frac{\tilde{S}_X}{\sigma}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X} \sim t_{n-1} \quad \text{(vgl. Def. 13.2)}$$

und somit $\mathrm{P}\left(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\tilde{S}_X} \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

Bemerkung 2 (Fortsetzung)

a) Konfidenzintervall bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt (Fortsetzung)

Somit gilt: $X_1, ..., X_n \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, Varianz σ^2 **unbekannt**, dann ist Konfidenzintervall für unbekannten Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ gegeben durch

$$\mathrm{KI}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{n}}\right]$$

(hierbei $t_{n-1,\gamma}$ das γ-Quantil der t_{n-1}-Verteilung)

b) Für $n \to \infty$ konvergiert t_n-Verteilung gegen $\mathcal{N}(0,1)-$Verteilung; Faustregel: Approximation bei $n \geq 30$ akzeptabel
$\to$ wenn $n \geq 30$, so kann im Konfidenzintervall aus Teil a) anstelle des $(1-\alpha/2)-$Quantils der t_n-Verteilung das entsprechende $\mathcal{N}(0,1)-$Quantil verwendet werden

Beispiel 13.3

(Wartezeiten ZfS, vgl. Bsp. 13.1 und 13.2)

X_i = „Wartezeit i-ter Besucher (in Minuten)“; unterstelle weiterhin Normalverteilung, nehme nun jedoch an dass σ **unbekannt** $\rightarrow$ $X_1, ..., X_{16} \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Gesucht: Konfidenzintervall für μ $\rightarrow$ wende Bem. 2 a) nach Def. 13.2 an

$\bar{X} = 12,25$ und $n = 16$ (vgl. Bsp. 13.2), weiterhin gilt $t_{15,0.975} = 2,131$; berechne nun außerdem $\tilde{S}_X^2$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_X^2 &= \frac{1}{15}\left((12-12,25)^2 + (20-12,25)^2 + \ldots + (2-12,25)^2\right) \\ &= 69,933 \end{aligned}$$

Beispiel 13.3 (Fortsetzung)

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{KI}_{0,95}(\mu) &= 12,25 \pm t_{15,0.975} \cdot \sqrt{\frac{69,933}{16}} \\
&= \left[12,25 - 2,131 \cdot \sqrt{\frac{69,933}{16}}; 12,25 + 2,131 \cdot \sqrt{\frac{69,933}{16}}\right] \\
&= [12,25 - 4,455; 12,25 + 4,455] \\
&= [7,795; 16,705] = [7 \text{ Min.\&48 Sek.}; 16 \text{ Min.\&42 Sek.}]
\end{aligned}
$$

Beachte: σ^2 bekannt $\longrightarrow$ $\mathsf{KI}_{0,95}(\mu) = [9,8; 14,7] \subset [7,8; 16,7]$
$= \mathsf{KI}_{0,95}(\mu)$ bei σ^2 unbekannt

Gründe: 1) $\tilde{S}_X^2 = 69,33 \sim 3 \times 25 (=\sigma^2$ bei bekannter Varianz)
2) Weniger Informationen $\longrightarrow$ größere Unsicherheit

Beispiel 13.4

Bei einer Umfrage unter 65 mittelständischen Unternehmen geben 26 Betriebe an, zusätzliche Mitarbeiter einstellen zu wollen, falls der Kündigungsschutz gelockert wird.

Gesucht: 90%-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der Betriebe, die nach einer Gesetzesänderung zusätzliche Arbeitsplätze schaffen wollen

$$\text{Definiere } X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ter Betrieb möchte zusätzl. Mitarb. einstellen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad X_1, \ldots, X_{65} \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}(1, p) \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{65} X_i \sim \text{Bin}(65, p)$$

Gemäß Fragestellung also benötigt: Konfidenzintervall für p

Bemerkung

Seien $X_1, ..., X_n \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}\,(1, p)$, dann ist ein (approximatives) Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gegeben durch:

$$\text{KI}_{1-\alpha}(p) = \left[\hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Dabei ist $\hat{p} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}$ und u_γ das γ-Quantil der Standardnormalverteilung.

Weiterhin gilt die Approximation als akzeptabel, wenn

$$(1) \quad n \geq 30, \qquad (2) \quad n\hat{p} \geq 10, \qquad (3) \quad n\,(1 - \hat{p}) \geq 10$$

Beispiel 13.5

(Umfrage in mittelständischen Unternehmen, vgl. Bsp. 13.4)

X_i wie in Bsp. 13.4 $\rightarrow$ $X_1, ..., X_{65} \overset{uiv}{\sim}$ Bin $(1, p)$

Gesucht: Konfidenzintervall für p $\rightarrow$ Nutze Bem. nach Bsp. 13.4:

$$\sum_{i=1}^{65} X_i = 26 \quad \rightarrow \quad \hat{p} = \bar{X} = \frac{26}{65} = 0,4$$

Überprüfung der Voraussetzungen:

$$\begin{array}{lrcll} (1) & n & = & 65 \geq 30 & \checkmark \\ (2) & n\,\hat{p} & = & 26 \geq 10 & \checkmark \\ (3) & n\,(1-\hat{p}) & = & 39 \geq 10 & \checkmark \end{array}$$

Beispiel 13.5 (Fortsetzung)

Weiter gilt

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0,4\,(1-0,4)} = \sqrt{0,24} = 0,49$$

$$1-\alpha = 0,9 \quad \Rightarrow \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,95} = 1,645$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathsf{KI}_{0,9}(p) &= \left[0,4 - 1,645\,\frac{0,49}{\sqrt{65}}; 0,4 + 1,645\,\frac{0,49}{\sqrt{65}}\right] \\ &= [0,4-0,1; 0,4+0,1] \\ &= [0,3; 0,5] \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Mit 90 % Wahrscheinlichkeit liegt der Anteil an Betrieben, die nach einer Gesetzesänderung zusätzliches Personal einstellen würden, zwischen 30 % und 50 %.

Bemerkung

Alle in Kapitel 13 betrachteten Konfidenzintervalle haben die Form

$$\left[\bar{X} - c\,\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + c\,\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

hierbei

- $c = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (Normalvtlg. bei bekannter Varianz; Binomialvtlg.) bzw. $c = t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ (Normalvtlg., Varianz unbek.)
- $\tilde{\sigma} = \sigma$ (Normalvtlg., Varianz bek.), $\tilde{\sigma} = \tilde{S}_X$ (Normalvtlg., Varianz unbek.) bzw. $\tilde{\sigma} = \sqrt{\bar{X}\,(1-\bar{X})}$ (Binomialvtlg.)

Die Länge der Konfidenzintervalle beträgt somit

$$L = \bar{X} + c\,\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - c\,\frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot c \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Bemerkung (Fortsetzung)

$L = 2 \cdot c \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \longrightarrow$ die hier betrachteten Konfidenzintervalle für unbekannte Erwartungswerte sind umso schmaler

- je größer der Stichprobenumfang n ist
- je kleiner die (geschätzte) Standardabweichung σ (bzw. $\hat{\sigma}$) ist
- je kleiner das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ ist

Nutzen in der Praxis: Gebe L vor und verwende

$$n = \left(2 \cdot \frac{\tilde{\sigma} \cdot c}{L}\right)^2$$

zur Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs

Beispiel 13.6

a) Wartezeiten ZfS: Wieviele Studierende müssen befragt werden, damit das 95%-Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit nicht breiter ist als vier Minuten (Vorauss. wie in Bsp. 13.1, d.h. Normalvtlg. mit $\sigma = 5$ bekannt)?

b) Umfrage in Betrieben, vgl. Bsp. 13.4 und Bsp. 13.5: Wieviele mittelständische Unternehmen müssen befragt werden, damit das 90%-Konfidenzintervall für den Anteil der Betriebe, die bei Lockerung des Kündigungsschutzes zusätzliche Mitarbeiter einstellen wollen, nicht breiter als zehn Prozentpunkte ist?

Beispiel 13.6 (Fortsetzung)

Bisher: n fest, α fest $\rightarrow \quad L = L(n, \alpha)$

Jetzt: L fest, α fest $\rightarrow \quad n = n(L, \alpha)$

Zu a)

Bsp. 13.1: $L = 14,7 - 9,8 = 4,9 = 4$ Minuten & 54 Sekunden

Jetzt: $L \overset{!}{\leq} 4$

Bem. nach Bsp. 13.5: $\quad n \geq \left(2 \cdot \frac{\tilde{\sigma} \cdot c}{L}\right)^2$

Hier: $\tilde{\sigma} = 5, \quad c = u_{0,975} = 1,96, \quad L = 4$

Beispiel 13.6 (Fortsetzung)

Zu a) (Fortsetzung)

Somit gilt:

$$L \overset{!}{\leq} 4 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left(\frac{2 \cdot 1,96 \cdot 5}{4}\right)^2 = 24,01$$

Es müssen also mindestens 25 Studierende befragt werden.

Zu b)

Bsp. 13.5: $L = 0,5 - 0,3 = 0,2 = 20$ Prozentpunkte

Jetzt: $L \overset{!}{\leq} 0,1$ $\rightarrow$ abermals Abschätzung wie in a) (vgl. Bem. nach Bsp. 13.5)

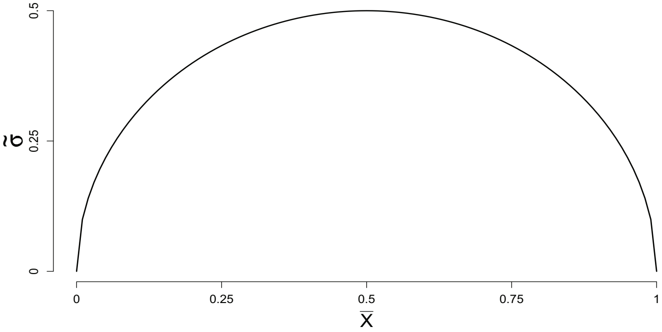
Beispiel 13.6 (Fortsetzung)

Zu b) (Fortsetzung)

Hier: $c = u_{0,95} = 1,645, \quad L = 0,1, \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}$

$\rightarrow$ Problem: $\bar{X}$ (und damit auch $\tilde{\sigma}$) ebenfalls von n abhängig;

Ausweg: Abschätzung von $\tilde{\sigma}$ durch $\max\left[\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}\right] = \frac{1}{2}$



Beispiel 13.6 (Fortsetzung)

Zu b) (Fortsetzung)

Gemäß der Bem. nach Bsp. 13.5 gilt somit:

$$L \overset{!}{\leq} 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left(\frac{2 \cdot 1,645 \cdot 1/2}{0,1} \right)^2 = 270,6025$$

Es müssen mindestens 271 mittelständische Unternehmen befragt werden.

Bemerkung

Fazit zur Intervallschätzung

- Konfidenzintervall für μ bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bekannt
  $\longrightarrow$ Quantile der Standardnormalverteilung
- Konfidenzintervall für μ bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt
  $\longrightarrow$ Quantile der t_{n-1}-Verteilung
- Approximatives Konfidenzintervall für p bei Bin (n, p)
  $\longrightarrow$ Quantile der Standardnormalverteilung
- Bestimmung des notwendigen Stichprobenumfangs bei fester Intervalllänge $\longrightarrow$ Bemerkung nach Beispiel 13.5

Kapitel 14: Statistische Signifikanztests

Motivation

- **Bisher:** Punkt- und Intervallschätzungen für unbekannte Parameter einer Verteilung, dabei keine Verwendung von Vorinformationen
- **Jetzt:** Vorinformationen/Vermutungen/Behauptungen über Verteilung bzw. einzelne Parameter $\rightarrow$ formuliere Hypothese H_0 und überprüfe diese anhand einer Stichprobe; Verwerfe H_0 (d.h. Entscheidung für eine Alternative H_1), wenn Stichprobenergebnis in deutlichem(=signifikantem) Gegensatz zu H_0 steht $\rightarrow$ Überprüfungsverfahren heißt Signifikanztest

Beispiel 14.1

a) Wartezeiten ZfS (vgl. Bsp. 13.1)

Behauptung ZfS: Mittlere Wartezeit maximal 10 Minuten

Wartezeiten (in Min.) von 16 zufällig ausgew. Besuchern:

12, 20, 5, 15, 8, 1, 30, 25, 10, 4, 17, 11, 20, 10, 6, 2

Annahme: Wartezeiten normalverteilt mit $\sigma = 5$ bekannt

Überprüfe ZfS-Behauptung mit statistischem Signifikanztest

$\rightarrow$ Situation: $X_1, ..., X_{16} \overset{uiv}{\sim} \mathcal{N}(\mu, 25)$

Testproblem: $H_0 : \mu \leq 10$ gegen $H_1 : \mu > 10$

Beispiel 14.1 (Fortsetzung)

b) Salz in der Suppe

Ein skeptischer Mensagänger möchte an einem bestimmten Tag die Nullhypothese „Mindestens die Hälfte aller Suppen ist versalzen." überprüfen. Er will diese Nullhypothese verwerfen, wenn von fünf zufällig ausgewählten Suppen keine einzige versalzen ist.

$$\rightarrow \quad X_1, ..., X_5 \overset{uiv}{\sim} \text{Bin}\,(1, p) \;\text{ mit }\; X_i = \begin{cases} 1 & \text{Suppe } i \text{ versalzen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Testproblem: $H_0 : p \geq 0,5$ gegen $H_1 : p < 0,5$

Testentscheidung: $T = \sum_{i=1}^{5} X_i = 0 \quad \leftrightarrow \quad$ Entscheidung für H_1

Bemerkung

Mögliche Konsequenzen einer Testentscheidung

		Testentscheidung	
		Lehne H_0 nicht ab	Lehne H_0 ab
Realität	H_0 wahr	✓	Fehler 1. Art
	H_0 falsch	Fehler 2. Art	✓

$$\Rightarrow$$

„No test based upon a theory of probability can by itself provide any valuable evidence of the truth or falsehood of a hypothesis.“

(Neyman & Pearson (1933), On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, *Phil Trans R Soc Lond A* **231**, 289 – 337.)

Beispiel 14.2

Suppe in der Mensa versalzen ja/nein? Testentscheidung wie in Bsp. 14.1

Die Wahrscheinlichkeit, weniger als die Hälfte aller Suppen als versalzen einzuordnen, obwohl mindestens die Hälfte aller Suppen versalzen ist, beträgt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\text{Fehler 1. Art}\right) &= \mathsf{P}\left(H_0 \text{ ablehnen} \,|\, H_0 \text{ wahr}\right) \\
&= \max_p \mathsf{P}\left(T = 0 \,|\, p \geq 0,5\right) \\
&= \mathsf{P}\left(T = 0 \,|\, p = 0,5\right), \quad \text{da} \quad T \sim \text{Bin}\left(5, p\right) \\
&= \binom{5}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 \;=\; 0,5^5 \\
&= 0,03125 \;=\; 3,125\%
\end{aligned}$$

Beispiel 14.2 (Fortsetzung)

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens die Hälfte aller Suppen als versalzen einzuordnen, obwohl weniger als die Hälfte aller Suppen versalzen ist, beträgt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\,(\text{Fehler 2. Art}) &= \mathsf{P}\,(H_0 \text{ nicht ablehnen} \,|\, H_0 \text{ falsch}) \\
&= \mathsf{P}\,(T > 0 \,|\, p < 0,5) \\
&= \mathsf{P}\,(0 < T \leq 5 \,|\, p < 0,5) \\
&= 1 - \mathsf{P}\,(T = 0 \,|\, p < 0,5), \ \text{ s. Bem. 2 nach Def. 9.4} \\
&= 1 - \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5, \quad \text{da} \quad T \sim \text{Bin}\,(5, p) \\
&= 1 - (1-p)^5
\end{aligned}$$

Beispiel 14.2 (Fortsetzung)

Fehler 2. Art für $p = 0,49 \in H_1$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(T > 0 \,|\, p = 0,49\right) &= 1 - \mathsf{P}\left(T = 0 \,|\, p = 0,49\right) \\ &= 1 - 0,035 = 0,9655 \end{aligned}$$

Fehler 2. Art für weitere $p \in H_1$

$p \in H_1$	0,49	0,45	0,35	0,25,	0,05
P (Fehler 2. Art)	96,55%	94,97%	88,4%	76,27%	22,62%