## Bemerkung

a) Funktionen von Zufallsvariablen sind wieder Zufallsvariablen. Betrachte etwa zweimaligen Würfelwurf (vgl. Beispiel 8.2 b)) und definiere Zufallsvariablen: $X_1 =$ „Augenzahl Wurf 1“; $X_2 =$ „Augenzahl Wurf 2“. Dann sind

$$\begin{aligned} Z_1 &= \min\{X_1, X_2\} \\ Z_2 &= \max\{X_1, X_2\} \\ Z_3 &= X_1 + X_2 \end{aligned}$$

ebenfalls Zufallsvariablen

b) Im Folgenden von Interesse: Wie lassen sich Wahrscheinlichkeiten angeben, dass Zufallsvariable $X$ Wert $x_i$ annimmt? Zunächst lediglich Betrachtung <u>diskreter</u> Zufallsvariablen.

## Definition 9.2

Sei $X$ diskrete Zufallsvariable mit möglichen Realisationen $x_1, x_2, ..., x_k$. Dann heißt die Funktion $f(\cdot)$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit $X$ die Realisation $x_i$ annimmt,

$$f(x_i) = \mathsf{P}\,(X = x_i), \quad i = 1, \ldots, k,$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X$.

## Beispiel 9.2

(Zweimaliges Würfeln, vgl. Beispiel 8.2 b))

- Definiere $X$ =Augensumme beider Würfe
- 8.2 b) bzw. 8.4: Zweimaliges Würfeln entspricht Laplace Experiment mit $|\Omega| = 36 \ \rightarrow$

| $X(\omega) = x_i$ | {zugehörige $\omega$} | | $\mathsf{P}(X = x_i)$ |
|---|---|---|---|
| $X = 2$ | $\{(1,1)\}$ | $\Rightarrow$ | $\mathsf{P}(X = 2) = 1/36$ |
| $X = 3$ | $\{(1,2),(2,1)\}$ | $\Rightarrow$ | $\mathsf{P}(X = 3) = 2/36$ |
| $X = 4$ | $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ | $\Rightarrow$ | $\mathsf{P}(X = 4) = 3/36$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $X = 12$ | $\{(6,6)\}$ | $\Rightarrow$ | $\mathsf{P}(X = 12) = 1/36$ |

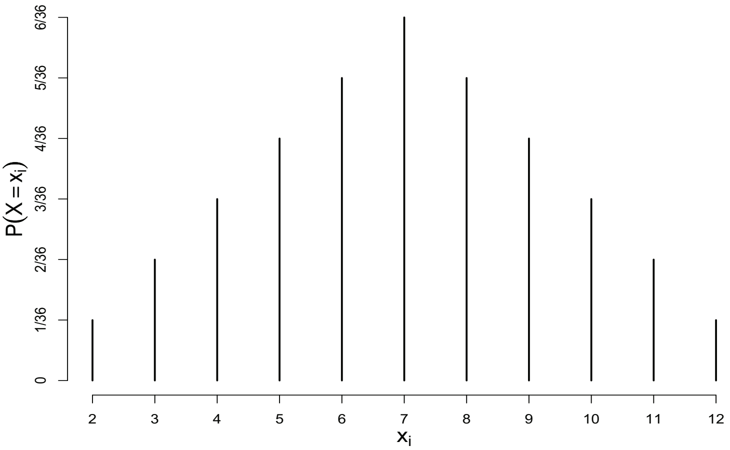
## Beispiel 9.2 (Fortsetzung)

| Realisation $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | $1/36$ | $2/36$ | $3/36$ | $4/36$ | $5/36$ | $6/36$ |

| Realisation $x_i$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x_i)$ | $5/36$ | $4/36$ | $3/36$ | $2/36$ | $1/36$ |

$\Rightarrow \quad \sum_i \mathrm{P}(X = x_i) = 1$ (klar, da sich eine Augensumme zwischen 2 und 12 auf jeden Fall realisieren wird!)

# Beispiel 9.2 (Fortsetzung)



## Beispiel 9.2 (Fortsetzung)

- Frage: Wie wahrscheinlich überschreitet Zufallsvariable einen bestimmten Wert nicht?
- Hier etwa: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Augensumme $\leq 3$?

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X \leq 3) &= \mathsf{P}(\{(1,1)\} \cup \{(1,2),(2,1)\}) \\
&= \mathsf{P}(\{(1,1)\}) + \mathsf{P}(\{(1,2),(2,1)\}) \\
&\quad + \mathsf{P}(\{(1,1)\} \cap \{(1,2),(2,1)\}) \\
&= \mathsf{P}(\{(1,1)\}) + \mathsf{P}(\{(1,2),(2,1)\}) + \mathsf{P}(\emptyset) \\
&= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + 0 \\
&= \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3)
\end{aligned}$$

## Definition 9.3

Für eine Zufallsvariable $X$ heißt die Funktion $F(\cdot)$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit $X$ einen Wert $x$ nicht überschreitet,

$$F(x) = \mathsf{P}\,(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

Verteilungsfunktion von $X$.

## Bemerkung

Für eine diskrete Zufallsvariable $X$ gilt

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \; x \in \mathbb{R}$$

(vergleiche Definition 2.2: $F(x)$ „theoretisches Gegenstück" zu empirischer Verteilungsfunktion $F_n(x)$)

## Beispiel 9.3

(Zweimaliges Würfeln, vgl. Beispiel 9.2)

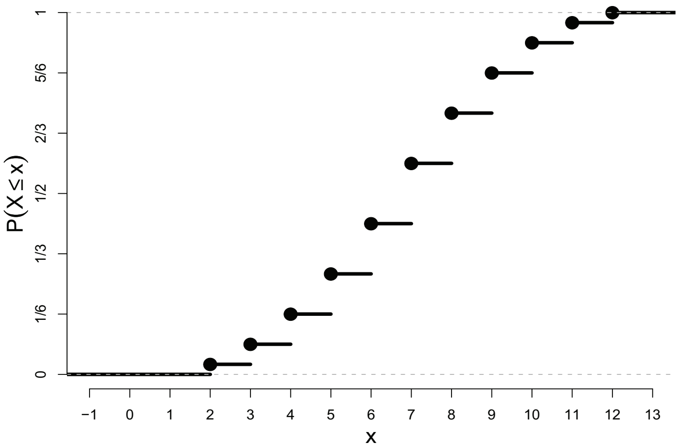
Weiterhin sei $X$ =Augensumme beider Würfe

- In Bsp. 9.2 berechnet: $F(3) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \frac{3}{36}$
- Bem. nach Def. 9.3:
  $F(4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) = \frac{6}{36}$,
  $F(5) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) = \frac{10}{36}, \ldots$

| $x \in$ | $(-\infty, 2)$ | $[2, 3)$ | $[3, 4)$ | $[4, 5)$ | $[5, 6)$ | $[6, 7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 0 | 1/36 | 3/36 | 6/36 | 10/36 | 15/36 |

| $x \in$ | $[7, 8)$ | $[8, 9)$ | $[9, 10)$ | $[10, 11)$ | $[11, 12)$ | $[12, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 21/36 | 26/36 | 30/36 | 33/36 | 35/36 | 1 |

# Beispiel 9.3 (Fortsetzung)




$\rightarrow F(x)$ Treppenfunktion; Sprungstellen $x = 2, 3, ..., 12$, Sprunghöhen den Werten der Wahrscheinlichkeitsfunktion entsprechend $(1/36, 2/36, 3/36, ..., 1/36)$

## Bemerkung

Betrachte nun stetige Zufallsvariable $X$; Hier Definition der Wahrscheinlichkeitsfunktion durch $f(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i)$ analog zu Definition 9.2 nicht sinnvoll

- Grund: $X$ stetig $\rightarrow$ Sämtliche $x_i \in \mathbb{R}$ können sich realisieren (zumindest auf Intervall, vergleiche Definition 9.1)
- Stetigkeit in Praxis jedoch Idealisierung, da Messungen diskret
  - Sei etwa $X =$ Körpergewicht (in kg) einer zufällig ausgewählten Person $i$ $\rightarrow$ $\mathsf{P}(X = 82,514367842312)$ ???

$\rightarrow$ deswegen:

$$\mathsf{P}(X = x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

## Definition 9.4

Sei $X$ stetige Zufallsvariable mit möglichen Realisationen im Intervall $(a, b)$, $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ erlaubt, und differenzierbarer Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann heißt die erste Ableitung

$$f(x) = F'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

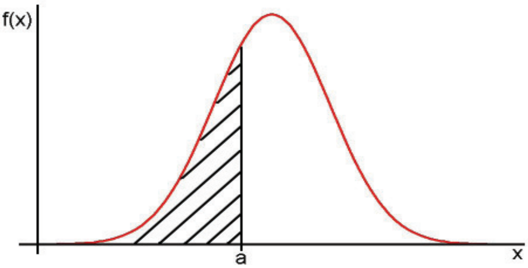
Dichtefunktion (kurz Dichte) von $X$.

## Bemerkung 1

a) Zusammenhang zwischen Verteilungs- und Dichtefunktion

$$f(x) = F'(x) \quad \text{(vgl. Def. 9.4) und } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

b) Interpretation der Dichtefunktion




schraffiert: $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = F(a) = \mathrm{P}(X \leq a)$

$\rightarrow$ gesamter Flächeninhalt unter der Dichte=1

## Bemerkung 2

a) **Eigenschaften der Verteilungsfunktion** („Gegenstück“ zur Bemerkung nach Beispiel 2.3): Sei $X$ beliebige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann gilt

- $F(x)$ ist monoton nicht fallend
- $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\mathsf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

# Bemerkung 2 (Fortsetzung)

b) **Eigenschaften der Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion:**
Sei $f(x)$ die der Zufallsvariablen $X$ aus a) zugehörige Wahrscheinlichkeits-/Dichtefunktion. Dann gilt

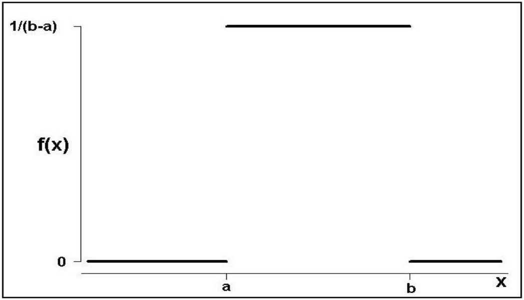
- $f(x) \geq 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
- $\sum\limits_{i \in I} f(x_i) = 1$ falls $X$ diskret ($I$ Indexmenge, z.B. $I = \{1, ..., n\}$), bzw. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ falls $X$ stetig
- $F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx,$ falls $X$ stetig

# Beispiel 9.4

a) Gleich-/Rechteckverteilung (einfachste stetige Verteilung)

- $X$ gleichverteilt auf Intervall $[a, b]$ $\rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

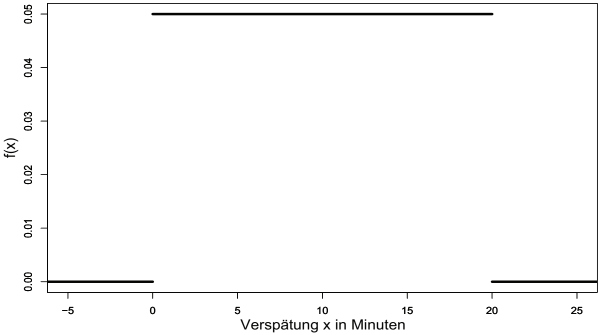



$\rightarrow$ Werte auf Intervall „gleichmäßig“ verteilt

# Beispiel 9.4 (Fortsetzung)

b) Sei $X$ =„Verspätung der S1 an der Haltestelle Universität Dortmund“; Annahme: $X$ auf Intervall $[0, 20]$ gleichverteilt

$$\rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & x \in [0, 20] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



# Beispiel 9.4 (Fortsetzung)

b) (Fortsetzung)

- Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt S1-Verspätung zwischen fünf und zehn Minuten?

$$\mathrm{P}\,(5 < X \leq 10) = F(10) - F(5)$$

(vgl. Bem. 2 a) nach Def. 9.4) $\longrightarrow$ Berechnung von $F(x)$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{20}\,dt = \frac{1}{20}\,t\Big|_0^x = \frac{x}{20}$$

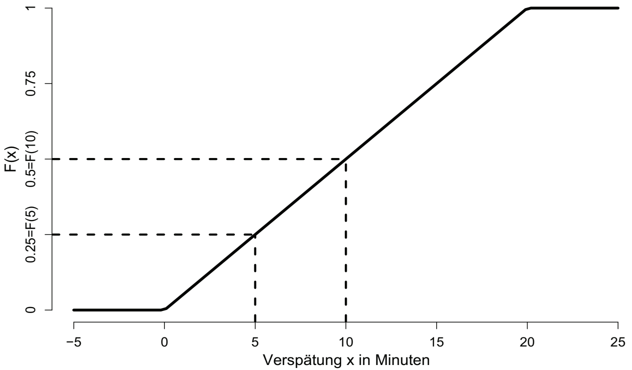
$$\longrightarrow \text{Insgesamt: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{20}, & 0 \leq x \leq 20 \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

# Beispiel 9.4 (Fortsetzung)

b) (Fortsetzung)

$$\mathrm{P}\,(5 < X \leq 10) \quad = F(10) - F(5) = \frac{10}{20} - \frac{5}{20} = 0,25$$

$\rightarrow$ P(S1 fünf bis zehn Minuten zu spät)=25 %



## Definition 9.5

Gilt für zwei Zufallsvariablen $X$ und $Y$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \mathsf{P}\left(X \leq x\right) \cdot \mathsf{P}\left(Y \leq y\right) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

so heißen $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig.

## Beispiel 9.5

(zweimaliges Würfeln, vgl. u.a. Beispiel 9.2)

$X$ =Augenzahl erster Wurf

$Y$ =Augenzahl zweiter Wurf

## Beispiel 9.5 (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\,(X \le 3, Y \le 5) &= \mathsf{P}\,(X \le 3 \textbf{ und } Y \le 5) \\
&= \mathsf{P}\,(\underbrace{\{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),...,(3,6)\}}_{A \text{ mit } |A|=18} \\
&\qquad \textbf{und } \underbrace{\{(1,1),...,(1,5),(2,1),...,(6,5)\}}_{B \text{ mit } |B|=30}\,) \\
&= \mathsf{P}\,(A \cap B) \\
&= \mathsf{P}\,(\underbrace{\{(1,1),(1,2),...,(1,5),(2,1),...,(3,5)\}}_{C \text{ mit } |C|=15}) \\
&= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

# Beispiel 9.5 (Fortsetzung)

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ \mathsf{P}\,(Y \leq 5) &= \mathsf{P}(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Und somit

$$\mathsf{P}\,(X \leq 3) \cdot \mathsf{P}\,(Y \leq 5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} = \mathsf{P}\,(X \leq 3, Y \leq 5)$$

Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}$ nachweisbar $\rightarrow$ $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig

# Bemerkung

Fazit/Zusammenfassung Kapitel 9

- Zufallsvariablen zur vereinfachten Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; Quantifizierung von Ereignissen
- Diskrete Zufallsvariablen besitzen Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion
- stetige Zufallsvariablen besitzen Dichte und Verteilungsfunktion

# Kapitel 10: Erwartungswert, Varianz und Kovarianz von Zufallsvariablen

## Motivation Erwartungswert: Welchen Wert nimmt Zufallsvariable durchschnittlich an?

Populärstes Lagemaß aus Teil A: Arithmetisches Mittel

- Ausgangslage: Metrisch skaliertes Merkmal $X$ mit möglichen Ausprägungen $a_1, ..., a_k$, die mit relativen Häufigkeiten $h(a_1), ..., h(a_k)$ auftreten. Es gilt (vergleiche Definition 3.1 und Beispiel 3.2 a))

$$\bar{x}^a = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot h(a_i)$$

$\longrightarrow$ Idee: Ersetze relative Häufigkeiten durch bekannte Wahrscheinlichkeiten

## Definition 10.1

a) Sei $X$ diskrete Zufallsvariable mit möglichen Realisationen $x_1, ..., x_n$ und $f(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i)$ Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann heißt

$$\mathsf{E}\,(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot f(x_i)$$

Erwartungswert von $X$ ($I =$Indexmenge).

b) Sei $X$ stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$. Dann heißt

$$\mathsf{E}\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Erwartungswert von $X$.

## Beispiel 10.1

a) $X =$„Augensumme zweimaliges Würfeln", vgl. u.a. Bsp. 9.2

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \sum_{i \in I} x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{11} x_i \cdot f(x_i) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \end{aligned}$$

b) $X =$„Anzahl Kopf bei zweimaligem Münzwurf", vgl. Bsp. 9.1

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X) &= \sum_{i \in I} x_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot f(x_i) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

## Beispiel 10.1 (Fortsetzung)

c) $X =$„Verspätung der S1“, vgl. Bsp. 9.4

$$\mathsf{E}\,(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{20} x \cdot \frac{1}{20}\,dx = \frac{1}{40}\,x^2\Big|_0^{20} = 10$$

## Bemerkung

a) Ist Wahrscheinlichkeitsfunktion/Dichte einer Zufallsvariablen $X$ symmetrisch um $x^\star$, dann gilt $\mathsf{E}\,(X) = x^\star$

b) Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen $X$ muss nicht unbedingt mögliche Realisation $x_i$ von $X$ sein

c) Der Erwartungswert muss nicht notwendigerweise existieren, d. h. $\mathsf{E}\,(X) = \infty$ ist möglich